# *Chapitre 1: Généralités sur les modes de transfert de chaleur*

## *1. Introduction:*

Parmi les modes d'échange d'énergie, le transfert de chaleur est certainement l'un des plus courants. Il intervient naturellement entre deux systèmes dès qu'une différence de température apparaît entre eux et cela quel que soit le milieu, même vide, qui les sépare. L'importance de ces phénomènes de transmission de chaleur résulte de leur intervention dans presque tous les procédés des différents secteurs d'activités : chimie, pharmacie, agro-alimentaire, environnement, pétrole…Le rôle de transfert de chaleur devient souvent essentiel et même déterminant lorsqu'il est à l'origine des techniques utilisées comme, par exemple, les échangeurs de chaleur, l'isolation thermique ou le calorifugeage…

On distingue trois modes de transfert de chaleur: ***conduction***, ***convection*** et ***rayonnement***.
Dans la plupart des situations rencontrées dans l'industrie, ces différents modes ne sont pas dissociés et peuvent intervenir ensemble.

- ***Exemples:***
  - Echange de chaleur entre deux fluides, séparés par une paroi solide, circulant dans un échangeur de chaleur.
  - Transmission de la chaleur des gaz chauds (produits de combustion) vers les parois internes d'une chambre de combustion d'une chaudière ou d'un four.
  - Déperdition de chaleur dans des conduites transportant des fluides caloporteurs.
  - Déperdition de chaleur dans un bâtiment à travers les murs en contact avec l'extérieur.
  - Diffusion de chaleur dans un local via un radiateur ou un plancher chauffant.

*Lorsque l'un des modes est prédominant on négligera évidemment les deux autres.*

Tous ces modes de transfert de chaleur ont la même conséquence: la variation de la température dans le milieu matériel où ils interviennent. Parfois, cette variation de température peut conduire à un changement de phase (vaporisation, condensation, fusion, solidification). Dans cette situation, la chaleur latente joue le rôle d'une source de chaleur (positive ou négative) supplémentaire qui accroît la complexité du phénomène de transfert de chaleur. Il faut noter que l'intensité de ce transfert devient beaucoup plus grande en présence de changement de phase, ce qui explique l'utilisation de ce phénomène dans de nombreuses applications pratiques utilisant des technologies modernes mettant en jeu des flux de chaleurs très élevées.

## *2. Grandeurs thermiques:*

### *2.1. Chaleur:*

La chaleur est une forme d'énergie dont les manifestations ont la particularité d'être directement ressenties par le corps humain. Les notions de chaud ou de froid résultent de la perception par nos sens de l'accroissement ou la diminution de la chaleur.

On distingue deux formes de chaleur: ***chaleur sensible*** et ***chaleur latente***.

#### *2.1.1. Chaleur sensible:*

On parle de chaleur sensible lorsqu'un corps qui reçoit ou cède de la chaleur s'échauffe ou se refroidit sans changer d'état.

Cette quantité de chaleur est donnée par:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{c_p} \times \Delta \boldsymbol{T} \qquad (\mathbf{1})$$

où $\boldsymbol{m}$ est la masse du corps, $\boldsymbol{c_p}$ sa chaleur massique et $\Delta \boldsymbol{T}$ la variation de sa température.



### *2.1.2. Chaleur latente:*

On parle de chaleur latente lorsqu'un corps qui reçoit ou cède de la chaleur l'utilise pour changer d'état à température constante.
Cette quantité de chaleur est donnée par:

$$\boldsymbol{Q = m \times L} \qquad (2)$$

où $\boldsymbol{L}$ est le coefficient de chaleur latente.

### *2.2. Température:*

D'une manière générale, la température est une mesure de l'état de vibration (atomes) ou d'agitation (molécules) des constituants fondamentaux de la matière.
En effet, l'énergie thermique d'un milieu matériel correspond à l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant une certaine liberté de mouvement (molécules, atomes, électrons libres, etc.). Ceux-ci pourront échanger toute ou partie de leur énergie thermique, c'est-à-dire gagner ou perdre de l'énergie cinétique.

La température, notée $\boldsymbol{T}$, s'exprime en °$\boldsymbol{C}$ ou en $\boldsymbol{K}$.

### *2.2.1. Champ de température:*

Les transferts de chaleur sont déterminés à partir de l'évolution, dans l'espace et dans le temps, de la température. Ainsi, on peut définir en chaque point $\boldsymbol{M}$ d'un corps (solide, liquide ou gaz) un scalaire, fonction des coordonnées du point $\boldsymbol{M}$ et du temps, appelé champ de température: $\boldsymbol{T(M,t)}$.

On distingue deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit ***permanen***t ou ***stationnaire***;
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit ***variable*** ou ***instationnaire***.

### *2.2.2. Surfaces isothermes:*

On appelle surface isotherme le lieu des points ayant à chaque instant la même température. En ***régime permanent***, ***les isothermes sont invariantes***; en régime variable, elles sont mobiles et déformables.

Le vecteur gradient de température est en tout point normal à la surface isotherme passant par ce point.

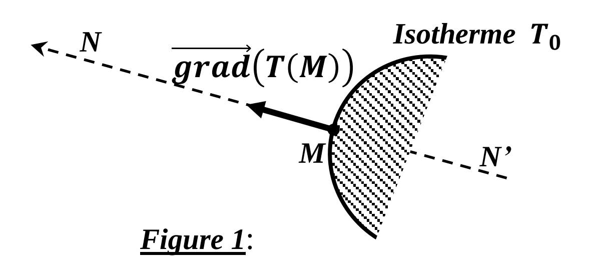



***Figure 1***:

### *2.3. Flux de chaleur:*

Pour tous les modes de transfert de chaleur, on définit le flux de chaleur ou la puissance thermique, noté $\boldsymbol{\Phi}$, comme la quantité de chaleur $\boldsymbol{Q}$ transmise à travers une surface d'aire $\boldsymbol{S}$ pendant l'intervalle de temps $\Delta \boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\Delta \boldsymbol{t}} \qquad (\boldsymbol{W}) \qquad (3)$$

Comme le flux de chaleur n'est pas nécessairement uniforme sur toute la surface d'échange $\boldsymbol{S}$, on introduit la notion de densité de flux local $\boldsymbol{\varphi}$ qui est défini comme la puissance thermique traversant l'unité de surface:

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} \quad (W/m^2) \qquad (4)$$

### 3. Aperçu des modes de transfert de chaleur:

### 3.1. Conduction:

On sait que l'énergie interne d'un corps solide, liquide ou gazeux correspond à l'énergie cinétique de ses éléments constituants qui se trouvent dans un mouvement permanent (atomes, molécules, électrons). La conduction représente le processus de transmission de chaleur par le contact direct entre les particules d'un corps donné (qu'il soit solide, liquide ou gazeux) ou entre des corps ayant des niveaux énergétiques (donc des températures) différents.

- ***Exemples***:
  - Transmission de la chaleur à travers une paroi d'échange séparant deux fluides circulant dans un échangeur de chaleur.
  - Transfert de chaleur à travers les parois d'un bâtiment ou des conduites transportant des fluides chauds ou froids.

Dans n'importe quel milieu matériel, ce mode de transfert de chaleur tend à uniformiser la température, donc la répartition d'énergie cinétique des particules constituantes dans la masse du milieu.

- ***Remarques*:**
  - ***La conduction*** est le seul mode à exister dans un ***solide opaque***; ainsi la conduction concerne essentiellement les solides. ***Exemple***: transmission de la chaleur à travers une paroi en métal ou un mur en béton. Elle est aussi prédominante dans ***les fluides au repos*** (la convection est totalement exclue).

  - Pour ***les solides transparents***, une partie de la chaleur peut être transmise par ***rayonnement. Exemple***: transmission de la chaleur à travers un vitrage (porte ou fenêtre vitrée).
  - Dans ***les liquides*** et ***les gaz***, ***la convection*** et ***le rayonnement*** peuvent se superposer à *la* ***conduction*** qui est négligeable. ***Exemple***: transmission de la chaleur à travers les gaz chauds dans une chambre de combustion ou dans un four.

- ***Flux de chaleur conductif: Loi de Fourier***

La conduction thermique est régie par une loi dite de ***Fourier*** qui exprime, dans le cas de milieux homogènes et isotropes, la proportionnalité du vecteur densité surfacique de flux de chaleur et du gradient local de température $\overrightarrow{grad}(T)$:

$$\vec{\varphi}(M) = -\lambda \times \overrightarrow{grad}\big(T(M)\big) \qquad (W/m^2) \qquad (5)$$

Le coefficient de proportionnalité $\lambda$ est une caractéristique physico-chimique du milieu matériel désignée sous le nom conductivité thermique. Elle s'exprime en $W/m.°C$ ou en $Kcal/h.m.°C$ et traduit l'aptitude des matériaux à conduire la chaleur.

La densité de flux de chaleur $\varphi_x$ dans une direction caractérisée par un vecteur unitaire $\vec{e}_x$ est:

$$\varphi_x(M) = -\lambda \times \overrightarrow{grad}\big(T(M)\big).\vec{e}_x = -\lambda \times \frac{\partial T}{\partial x}(M) \qquad (6)$$

Le signe (-) est lié au fait que le flux de chaleur est positif quand le gradient thermique est négatif. La chaleur s'écoule de la zone la plus chaude vers la zone la plus froide.

La conductivité thermique $\lambda$ dépend principalement de la nature du matériau. D'une manière générale, les métaux sont beaucoup plus conducteurs de la chaleur que les corps non métalliques. Les gaz sont de mauvais conducteurs.

La conductivité thermique dépend également de la température et de l'état physique du matériau (solide, liquide, gaz). Par exemple, la conductivité de l'eau à:

- l'état ***gazeux*** (vapeur) est: $\lambda \approx 0,025\ W/m.°C$ (à $T = 100°C$),
- l'état ***liquide***: $\lambda \approx 0,6\ W/m.°C$ (à $T = 20°C$),
- l'état ***solide*** (glace) est: $\lambda \approx 2,2\ W/m.°C$ (à $T = 0°C$).

Il existe d'autres facteurs qui influencent la conductivité comme l'humidité et la densité.

Le flux de chaleur, noté $\Phi$, représente la quantité de chaleur qui passe par unité de temps à travers une surface isotherme $S$. Il s'exprime par la relation :

$$\Phi = \int_S \varphi \times dS = \varphi \times S = -S \times \lambda \times \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (W) \quad (7)$$

- ***Exercice d'application 1:***

On considère un four industriel dont les parois sont construites en briques réfractaires d'épaisseur $e = 15\ cm$ et de conductivité thermique $\lambda = 1,7\ W/m.°C$. Des mesures réalisées lors du fonctionnement du four, en régime permanent, ont révélé les températures suivantes : $1127°C$ et $877°C$ respectivement sur les surface frontières interne et externe d'une paroi du four. Calculer le flux de chaleur perdu à travers la paroi du four de $0,5\ m$ de hauteur et $1,2\ m$ de longueur.

***Solution:***

- Paroi simple en briques réfractaires ($\lambda = 1,7\ W/m.°C$, $e = 0,15\ m$, $L = 0,5\ m$ et $H = 1,2\ m$)
- Surfaces frontières de la paroi simple: ($S_i = S_e = S = L \times H$, $T_{Pi} = 1127°C$ et $T_{Pe} = 877°C$)

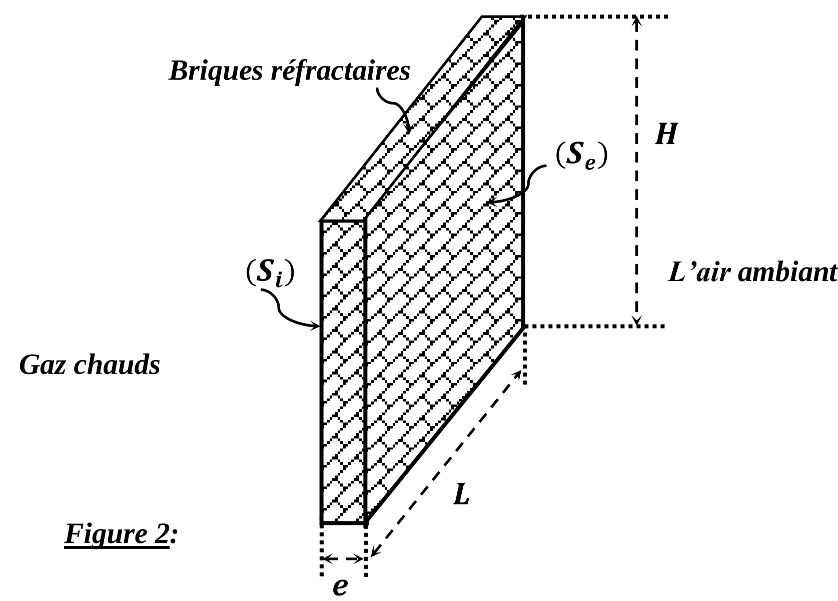


***Figure 2:***

La paroi en briques réfractaires correspond à un milieu matériel ***conductif*** *sans sources ni puits de chaleur, en* ***régime permanent****, pour lequel la chaleur se transmet suivant* ***une seule direction*** ($e << L$ et $H$). Le flux de chaleur traversant cette paroi s'exprime comme suit :

$$\Phi = \lambda . S . \frac{T_{pi} - T_{pe}}{e} = \lambda . H . L . \frac{T_{pi} - T_{pe}}{e} \approx \mathbf{1700}\ W = \mathbf{1,7}\ KW$$

*Les pertes thermiques à travers cette paroi sont élevées, on devra donc penser à réaliser une **isolation thermique efficace** de cette paroi (voir **chapitre 3**).*

### 3.2. *Convection:*

La convection est le processus de transmission de chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel, avec mouvement macroscopique de matière. Il ne peut donc avoir lieu qu'au sein des liquides ou des gaz; c'est le fluide en mouvement qui transporte la chaleur.
La convection peut apparaître entre des couches de fluide ayant des températures différentes ou entre un fluide en écoulement au long d'une paroi solide ayant une température différente de celle du fluide.
La convection est le mécanisme le plus important de transfert de chaleur entre une paroi solide et un fluide.

On distingue traditionnellement trois types de convection:

- ***La convection forcée*** qui se produit quand le mouvement de fluide est provoqué par une action externe telle qu'une pompe ou un ventilateur. C'est le cas des échangeurs de chaleur industriels, des radiateurs de voiture qui sont essentiellement des convecteurs: deux fluides en circulation forcée échangent de la chaleur à travers une paroi solide dont la température diffère des leurs. *Comme les vitesses d'écoulement peuvent atteindre des valeurs très élevées, le transfert par convection forcée est souvent extrêmement efficace.*

- ***La convection naturelle ou libre*** qui apparaît spontanément sous l'influence de différences de densités dues à des différences de températures au sein du fluide situé dans le champ de gravité. Le fluide chaud, plus léger, tend alors à montrer, tandis que le fluide froid, plus dense, descend. La configuration et l'intensité de la convection naturelle sont en relation directe avec les conditions thermiques qui la déclenchent, la nature du fluide et le volume de l'espace où a lieu ce processus. Le mécanisme de la convection naturelle se produit dans plusieurs situations. Il est, par exemple, responsable de l'homogénéisation de la température dans un local d'habitation: transfert de chaleur du radiateur vers les zones froides du local.

- ***La convection mixte*** qui correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convections naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement fictives, dues aux deux types de convection sont, considérées séparément, du même ordre de grandeur.

➢ ***Flux de chaleur convectif: Loi de Newton***

Le flux de chaleur échangé par convection entre une paroi solide (de surface $\boldsymbol{S}$) à température $\boldsymbol{T_S}$ et un fluide à température $\boldsymbol{T_\infty}$ (température mesurée loin de la paroi) peut être exprimé au moyen de la relation suivante:

$$\Phi = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{S} \times (\boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T_\infty}) \qquad (\mathbf{8}) \qquad (\boldsymbol{Loi\ de\ Newton})$$

où $\boldsymbol{h}$ est le coefficient d'échange de chaleur par convection (unité: $\boldsymbol{W/m^2.°C}$ ou $\boldsymbol{Kcal/h.m^2.°C}$).

Le coefficient $\boldsymbol{h}$ dépend, en général, de l'état (lisse ou rugueux) et de la forme géométrique de la paroi solide, de la nature de l'écoulement (convection forcée ou naturelle, laminaire ou turbulente) et essentiellement des propriétés thermophysiques du fluide ($\rho$, $c_p$, $\lambda$, $\mu$) et de l'écart de température ($\Delta \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_S} - \boldsymbol{T_\infty}$).

On donne à titre indicatif, dans le tableau suivant les ordres de grandeur des valeurs atteintes par le coefficient $\boldsymbol{h}$ pour différentes configurations.

***Tableau:***

| ***Configuration*** | $\boldsymbol{h}\ (W/m^2.°C)$ |
|---|---|
| ***Convection naturelle***<br><br>***Dans les gaz***<br>***Dans les liquides*** | <br><br>$\mathbf{2-30}$<br>$\mathbf{50-1000}$ |
| ***Convection forcée***<br><br>***Dans les gaz***<br>***Dans les liquides*** | <br><br>$\mathbf{25-250}$<br>$\mathbf{50-20000}$ |
| ***Convection avec changement de phase***<br><br>***Ebullition ou condensation*** | <br><br>$\mathbf{2500-100000}$ |

- ***Exercice d'application 2:***

***1.*** De l'air froid à $T_\infty = 16°C$, soufflé par un ventilateur, s'écoule sur un mur de $10\ m^2$ de surface, maintenue à une température constante de $23°C$. Si le coefficient de transfert de chaleur par convection est de $100\ W/m^2.°C$, déterminer la puissance thermique échangée entre l'air et le mur.

***2.*** L'air à $T_\infty = 30°C$ est en contact avec une plaque plane, de $2\ m^2$ de surface, maintenue à une température constante de $15°C$. Si le coefficient de transfert de chaleur par convection est de $10\ W/m^2.°C$, déterminer la puissance thermique échangée entre le fluide et la plaque.

***3.*** Du pétrole, à la température $T_\infty = 120°C$, est mis en circulation forcée dans un tube cylindrique de diamètre $D = 1\ cm$ et de température $T_S = 60°C$. Le coefficient de transfert de chaleur par convection forcée est $h = 1740\ W/m^2.°C$. Calculer le flux de chaleur échangé entre le fluide et le tube, par unité de longueur du tube.

***Solution:***

***1.*** Le flux de chaleur échangé par convection forcée entre l'air froid, soufflé par le ventilateur, et le mur donné par la loi de ***Newton*** :

$$\Phi = h.S.(T_S - T_\infty) \approx 7\ KW$$

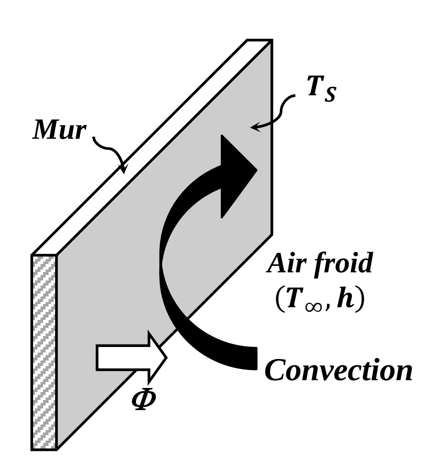



***Figure 3:***

***2.*** Le flux de chaleur transféré par convection de la plaque à l'air se détermine grâce à la loi de ***Newton:***

$$\Phi = h.S.(T_\infty - T_S) \approx 300\ W$$

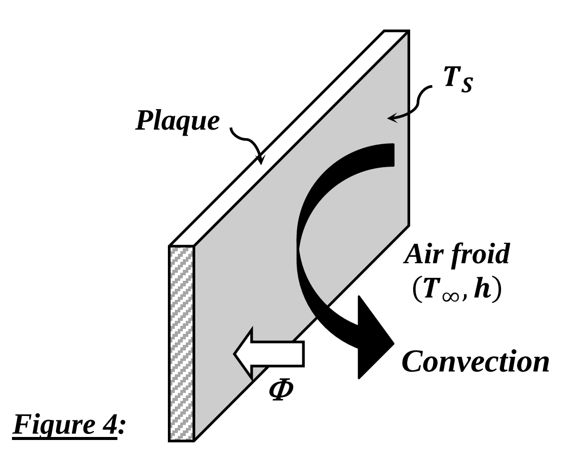



***Figure 4:***

**3.** Le flux de chaleur transféré par convection du pétrole au tube se calcule en appliquant la loi de ***Newton***:

$$\Phi = \boldsymbol{h}.\boldsymbol{S}.(\boldsymbol{T}_\infty - \boldsymbol{T}_S)$$

où $\boldsymbol{S}$ est l'aire de la surface latérale intérieure du tube (de longueur $\boldsymbol{L}$): $\boldsymbol{S} = \pi.\boldsymbol{D}.\boldsymbol{L}$.
Il s'ensuit que le flux de chaleur échangé par unité de longueur du tube est:

$$\Phi' = \frac{\Phi}{S} = \boldsymbol{h}.(\boldsymbol{T}_\infty - \boldsymbol{T}_S) \approx \mathbf{3280}\ \boldsymbol{W/m}$$

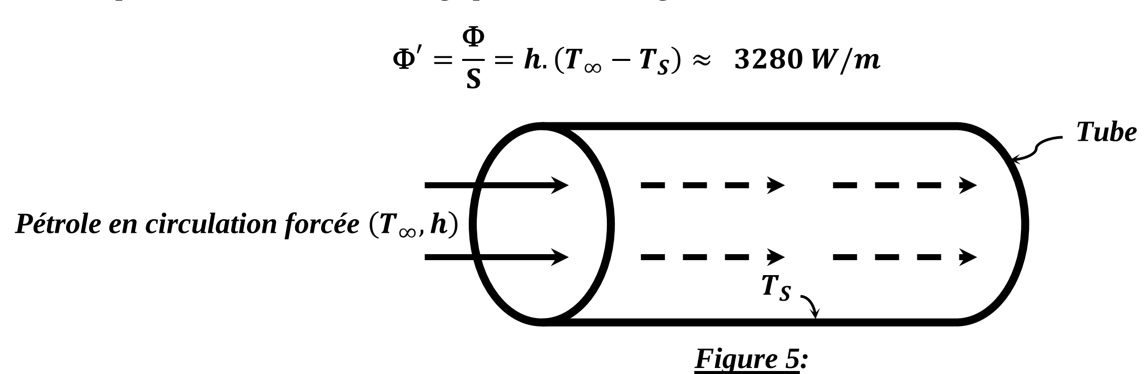



***Figure 5:***

➤ ***Exercice d'application 3:***

Un réfrigérateur est placé dans une salle où la température de l'air est de $\mathbf{21°C}$. Les parois de ce réfrigérateur sont supposées avoir une épaisseur $\boldsymbol{e = 30\ mm}$ et une conductivité thermique équivalente de $\mathbf{0,1}\ \boldsymbol{W/m.°C}$. La température sur les surfaces externes de cet appareil est égale à $\mathbf{16°C}$ et le coefficient de transfert de chaleur à l'extérieur est de $\mathbf{10}\ \boldsymbol{W/m^2.°C}$. Calculer la densité du flux de chaleur transféré à travers les parois de ce réfrigérateur. En déduire la température sur ses surfaces internes.

***Solution:***

- Paroi du réfrigérateur: ($\boldsymbol{\lambda = 0,1\ W/m.°C}$, $\boldsymbol{e = 30\ cm}$)
- Surfaces frontières de la paroi: ($\boldsymbol{T_{Pi}} =$? et $\boldsymbol{T_{Pe} = 16°C}$)
- Air extérieur: ($\boldsymbol{T_\infty = 21°C}$ et $\boldsymbol{h = 10\ W/m^2.°C}$)

***Paroi du réfrigérateur***
$T_{pe}$
$T_{pi}$
***L'air extérieur***
$\varphi$
***Air froid à l'intérieur du réfrigérateur***
$e$

***Figure 6:***

La densité du flux de chaleur transféré par convection de l'air vers la surface frontière externe de la paroi du réfrigérateur est donné par:

$$\boldsymbol{\varphi_{cv} = h \times (T_\infty - T_{pe})}$$

En régime permanent, la densité du flux de chaleur transféré par conduction à travers une paroi simple (milieu conductif sans source ni puits de chaleur) d'épaisseur $\boldsymbol{e}$ et dont les surfaces frontières sont portées aux températures $\boldsymbol{T_1}$ et $\boldsymbol{T_2}$, s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{\varphi_{cd} = \lambda \times \frac{T_{pe} - T_{pi}}{e}}$$

Bilan thermique sur la paroi:

$$\boldsymbol{\varphi = \varphi_{cv} = \varphi_{cd} \quad \Rightarrow \quad \varphi = h \times (T_\infty - T_{pe}) = \lambda \times \frac{T_{pe} - T_{pi}}{e}}$$

Par conséquent:

- La densité du flux de chaleur transféré à travers les parois du réfrigérateur est :

$$\boldsymbol{\varphi = h \times (T_\infty - T_{pe}) = 50\ W/m^2}$$

- La température sur les surfaces frontières internes $\boldsymbol{T_{pi}}$ est :

$$\boldsymbol{\varphi = \lambda \times \frac{T_{pe} - T_{pi}}{e} \quad \Rightarrow \quad T_{pi} = T_{pe} - \frac{e}{\lambda} \times \varphi = 1°C}$$

### *3.3. Rayonnement:*

Le phénomène de rayonnement thermique constitue un mode particulier de transfert thermique dans lequel les porteurs d'énergie ne sont plus représentés par des particules de substance, mais par des ondes électromagnétiques. Le mécanisme de rayonnement est créé par l'émission et l'absorption des ondes électromagnétiques porteuses d'énergie rayonnante et par la transformation de celle-ci en chaleur avec le changement de l'état énergétique (énergie interne) des corps qui la retiennent.

Tous les corps émettent continûment de l'énergie par leur surface, sous forme d'un rayonnement d'ondes électromagnétiques et ce d'autant plus que leur température est élevée. Inversement, soumis à un rayonnement incident ils en absorbent une partie qui se transforme en chaleur (stockée en leur sein). L'intensité du rayonnement émis ou absorbé dépend de la température et la nature du matériau (propriétés d'émission et d'absorption des matériaux).

Le rayonnement est un processus physique de transmission de chaleur entre deux corps de températures différentes, lorsqu'ils sont séparés par un milieu matériel ***transparent*** ou ***semi transparent*** ou même lorsqu'***un vide*** existe entre eux. Donc, contrairement à la conduction et à la convection, ce mode de transfert de chaleur ne nécessite pas la présence d'un support matériel solide ou fluide.

- ***Exemples:***

- Rayonnement reçu par les parois internes d'une chambre de combustion ou d'un four industriel en provenance des gaz chauds.
- Rayonnement échangé entre les parois d'un four, d'une chaudière...

- ***Remarque:***

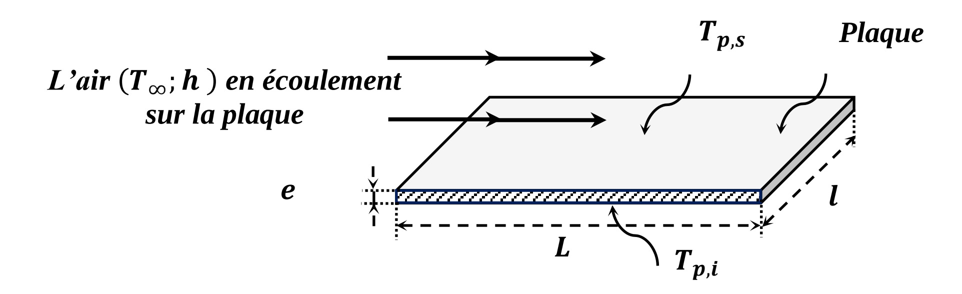
*Aux températures ordinaires*, le transfert de chaleur *par rayonnement* est *négligeable* (la conduction et la convection jouent un rôle important), mais il peut devenir *notable* et *prépondérant* lorsque *le niveau de température augmente* ($\boldsymbol{T} > 400°C$).

➤ ***Exercice d'application 4:***

Une plaque horizontale ($\lambda = 30\ W/\ m^2.°C$) de dimensions $900\ mm \times 600\ mm \times 30\ mm$ est maintenue à $T_{p,s} = 300°C$. L'air à $T_\infty = 30°C$ s'écoule sur la paroi supérieure de cette plaque. Si $250\ W$ de chaleur est perdue par rayonnement par la paroi supérieure de la plaque et le coefficient de transfert de chaleur par convection air-paroi supérieure vaut $22\ W/m^2.°C$, quelle sera la température, notée $T_{p,i}$, sur la paroi inférieure de la plaque.

***Solution:***

- Plaque: ($\lambda = 30\ W/m.°C$, $e = 30\ mm$, $l = 600\ mm$, $L = 900\ mm$, $T_{P,i} =$? et $T_{P,s} = 300°C$)
- Air environnant en écoulement forcé: ($T_\infty = 30°C$ et $h = 22\ W/m^2.°C$)
- Puissance thermique perdue, par rayonnement, par la plaque : $\Phi_{r,net} = 250\ W$




Bilan thermique sur la paroi:

$$\Phi_{cd} = \Phi_{cv} + \Phi_{r,net} \qquad (9)$$

Avec :

$\Phi_{cd}$: le flux de chaleur transmis par conduction à travers la plaque ;

$\Phi_{cv}$: le flux de chaleur échangé par convection entre la surface frontière supérieure de la plaque vers l'air environnant;

$\Phi_{r,net}$: le flux de chaleur perdu par rayonnement par la surface frontière supérieure de la plaque.

D'après la loi de $Fourier$, on a :

$$\Phi_{cd} = \lambda \times S \times \frac{T_{p,i} - T_{p,s}}{e} = \lambda \times L \times l \times \frac{T_{p,i} - T_{p,s}}{e}$$

D'après la loi de $Newton$, on a :

$$\Phi_{cv} = h \times S \times (T_{p,s} - T_\infty) = h \times L \times l \times (T_{p,s} - T_\infty)$$

L'équation du bilan ($9$) devient:

$$\lambda \times L \times l \times \frac{T_{p,i} - T_{p,s}}{e} = h \times L \times l \times (T_{p,s} - T_\infty) + \Phi_{r,net}$$

D'où on tire l'expression de la température $T_{p,i}$ :

$$T_{p,i} = T_{p,s} + \frac{e}{\lambda} \times \left[ h \times (T_{p,s} - T_\infty) + \frac{\Phi_{r,net}}{L \times l} \right]$$

***A.N.:*** $T_{p,i} \approx 306,4°C$

# *Chapitre 2: Rayonnement Thermique*

## *1. Introduction:*

Le phénomène de rayonnement thermique constitue un mode particulier de transfert thermique dans lequel les porteurs d'énergie ne sont plus représentés par des particules de substance, mais par des ondes électromagnétiques. Ainsi, contrairement à la conduction et à la convection, le rayonnement ne nécessite pas la présence d'un support matériel solide ou fluide.

## *2. Généralités et définitions*

### *2.1. Rayonnement thermique:*

Notre intérêt est porté uniquement sur le rayonnement thermique qui est celui émis par la matière du fait de sa température et au détriment de son énergie calorifique. Il s'étage de l'ultraviolet à l'infrarouge: $[\mathbf{0,1-100}]\,\mu\mathbf{m}$. Cet intervalle spectral se découpe ainsi: $\mathbf{0,1-0,4}\,\mu\mathbf{m}$ début de l'ultraviolet, $\mathbf{0,4-0,8}\,\mu\mathbf{m}$ domaine visible, $\mathbf{0,8-100}\,\mu\mathbf{m}$ infrarouge.

### *2.2. Classification des corps soumis à un rayonnement:*

Lorsqu'un rayonnement incident ($\boldsymbol{\Phi_i}$) arrive sur la surface d'un corps semi transparent, il est en partie réfléchi ($\boldsymbol{\Phi_r}$), en partie absorbé ($\boldsymbol{\Phi_a}$) et le reste est transmis ($\boldsymbol{\Phi_t}$) comme l'indique la figure ci-après.

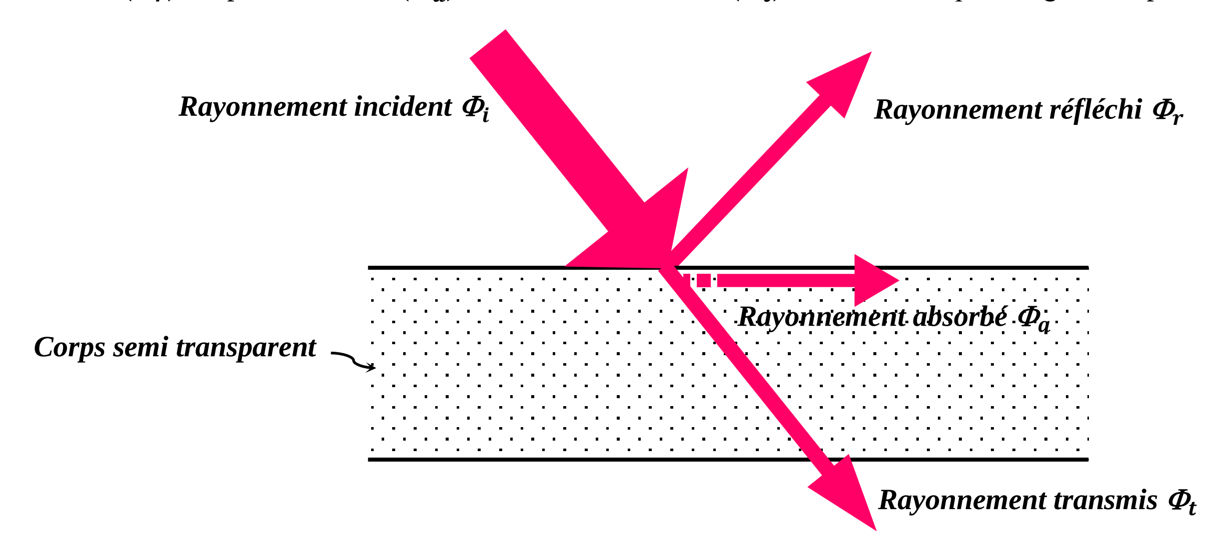



***Figure 1**: Réception du rayonnement par un corps semi transparent.*

La relation entre les énergies incidente, réfléchie, absorbée et transmise s'écrit:

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_t \qquad (\textit{Principe de conservation de l'énergie})$$

Elle s'écrit encore:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \qquad (1)$$

où:

$\boldsymbol{\rho = \frac{\Phi_r}{\Phi_i}}$ est l*e* ***coefficient de réflexion*** ou ***réflectivité***, c'est-à-dire la fraction du rayonnement incident réfléchi par le corps;

$\boldsymbol{\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_i}}$ est ***le coefficient d'absorption*** ou ***absorptivité***, c'est-à-dire la fraction du rayonnement incident absorbé par le corps;

$\boldsymbol{\tau = \frac{\Phi_t}{\Phi_i}}$ est ***le coefficient de transmission*** ou ***transmitivité***, c'est-à-dire la fraction du rayonnement incident transmis par le corps.

Ces paramètres caractérisent le comportement du corps vis-à-vis du rayonnement qu'il reçoit.

On distingue trois types de milieux matériels vis-à-vis du rayonnement: deux cas limites importants, les ***milieux parfaitement transparents*** et ***les milieux opaques***, et le cas général des ***milieux semi transparents***.

- ***Les milieux parfaitement transparents*** transmettent tout le rayonnement incident, et ce quelle que la longueur d'onde $\lambda$ et la direction de ce rayonnement. Pour ces corps la relation $(\mathbf{1})$ se réduit à: $\boldsymbol{\tau = 1}$. Le vide et les gaz simples ($\boldsymbol{O_2, N_2, H_2}$ ...) correspondent à ce type de milieu.

- ***Les milieux opaques*** ne transmettent aucune fraction du rayonnement incident; ce dernier est alors partiellement réfléchi et absorbé (le rayonnement est absorbé sous forme de chaleur près de l'impact). Pour ces corps la relation $(\mathbf{1})$ se réduit à: $\boldsymbol{\rho + \alpha = 1}$. La majorité des liquides et des solides sont des corps opaques. Ces corps arrêtent la propagation de tout rayonnement dès leur surface et se réchauffent, de ce fait, par absorption du rayonnement.

- ***Les milieux semi transparents ou partiellement transparents*** sont caractérisés par: $\boldsymbol{\rho + \alpha + \tau = 1}$. Dans ce cas, la propagation du rayonnement s'accompagne d'une diminution de l'énergie transportée, ce qui accroît d'autant l'énergie interne du milieu traversé. C'est le cas de certains gaz composés ($\boldsymbol{CO_2, H_2O, CO, CH_4}$ …) et de certains solides (plastiques, verres…).

Les grandeurs radiatives $\rho$, $\alpha$ et $\tau$ dépendent non seulement de la nature du matériau, de son épaisseur et de son état de surface, mais également de la longueur d'onde $\lambda$ et de la direction du rayonnement.

### *2.3. Classification des grandeurs*

Les grandeurs radiatives sont distinguées selon :

➢ *La composition spectrale du rayonnement*
- Si la grandeur correspond à l'ensemble du spectre du rayonnement thermique, elle est dite ***totale***.
- Si elle concerne un intervalle spectral étroit $d\lambda$ centré autour d'une longueur d'onde $\lambda$, elle est dite ***monochromatique***. On l'affecte d'un indice $\lambda$ pour la distinguer de la grandeur totale: $\boldsymbol{G_\lambda}$.

➢ *La distribution spatiale du rayonnement*
- Si la grandeur correspond à l'ensemble des directions de l'espace dans lesquelles un élément de surface peut rayonner ou recevoir du rayonnement, elle est dite ***hémisphérique***.
- Si elle caractérise une direction donnée de propagation du rayonnement, relativement à la surface considérée, elle est dite ***directionnelle***. On l'affecte d'un indice $\boldsymbol{ox}$ pour la distinguer de la grandeur hémisphérique: $\boldsymbol{G_{ox}}$

## *3. Corps noir et lois de rayonnement:*

### *3.1. Corps noir*

Un corps qui ***absorbe tout le rayonnement*** qu'il reçoit, quelle que soit sa longueur d'onde et sa direction, est appelé ***corps noir***. Il sert de référence à partir de laquelle les propriétés radiatives (d'émission et de réception du rayonnement) des autres corps se situent en retrait. Son coefficient d'absorption $\alpha$ est égal à $\mathbf{1}$ et ses coefficients de réflexion $\rho$ et de transmission $\tau$ sont, par conséquent, nuls.

***Le corps noir*** est aussi ***l'émetteur idéal***; il a la propriété d'émettre, à chaque température et longueur d'onde, ***le maximum d'énergie thermique*** pouvant être rayonné par la matière.

### *3.2. Lois du rayonnement:*

Les lois du rayonnement que nous allons établir décrivent l'émission du corps noir. Dans tout ce qui suit, les grandeurs relatives au corps noir seront affectées de l'exposant *''°''* pour les distinguer de celles relatives au corps réels.

#### *3.2.1. Loi de Planck: émittance monochromatique du corps noir*

La puissance thermique monochromatique rayonnée, par unité de surface, par un corps noir à la température $\boldsymbol{T}$ et à la longueur d'onde $\boldsymbol{\lambda}$ est donnée par la loi de ***Planck***:

$$M_\lambda^0(\lambda,T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \times \left(exp\left(\frac{C_2}{\lambda \times T}\right) - 1\right)} \qquad \left(W/_{m^2.\,\mu m}\right) \qquad (2)$$

Les valeurs des constantes physiques $C_1$ et $C_2$ sont données, en unités ***S.I.***, dans le tableau suivant:

| $T$ | $\lambda$ | $C_1 = 2\pi \times h \times C^2$ | $C_2 = \frac{h \times C}{K}$ | $M_\lambda^0$ |
|---|---|---|---|---|
| $Kelvin\ (°K)$ | $(m)$ | $3,741 \times 10^{-16}\ W.m^2$ | $0,014388\ m.°K$ | $W/m^3$ |
| | $(\mu m)$ | $3,741 \times 10^{8}\ W.\mu m^4/m^2$ | $14388\ \mu m.°K$ | $W/m^2.\mu m$ |

La fonction $M_\lambda^0$, appelée ***émittance monochromatique du corps noir***, est représentée par le réseau de courbes ci-après.

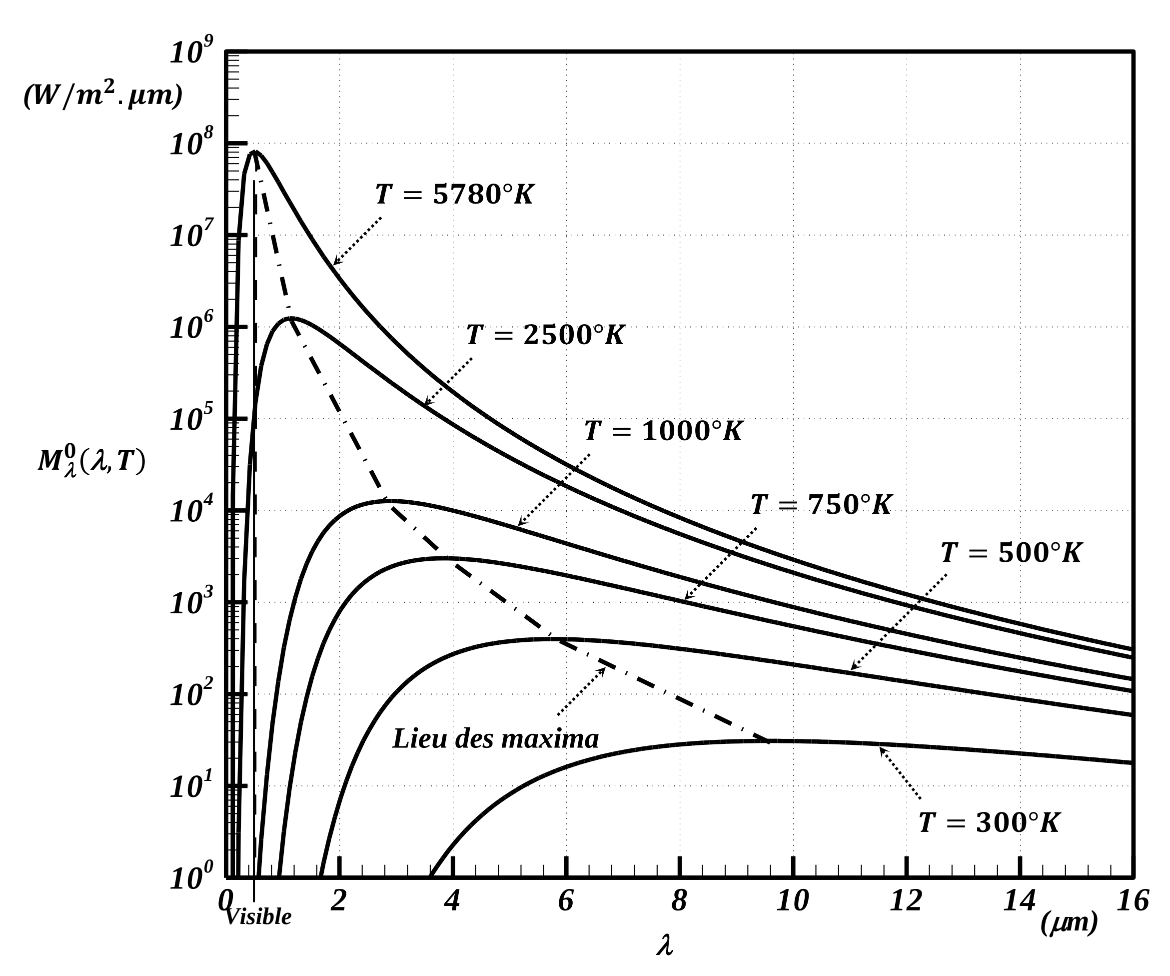



***Figure 2**: Distribution spectrale de l'émittance du corps noir en fonction de la température absolue (Loi de Planck).*

On constate qu'à chaque température $T$ correspond une courbe ayant un maximum situé à une valeur $\lambda_{max}$ de la longueur d'onde variable avec $T$. Ces courbes présentent une dissymétrie très prononcée: leur croissance avec $\lambda$ (courtes longueur d'onde) est beaucoup plus rapide que leur décroissance. Pour $\lambda \leq 0,5.\lambda_{max}$ il n'y a pratiquement plus d'énergie rayonnée (moins de $1\%$) alors qu'il faut atteindre $\lambda \leq 5.\lambda_{max}$ pour obtenir le même résultat dans l'infrarouge.

Ainsi, dans la pratique on peut considérer que ***l'étendue utile du spectre*** est comprise, à chaque température $T$, entre environ $0,5 \times \lambda_{max}$ et $5 \times \lambda_{max}$.

### *3.2.2. Lois de Wien*

Ces deux lois fournissent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du maximum d'émittance monochromatique du corps noir pour chaque température.

#### *3.2.2.1. Première loi de Wien ou loi de déplacement*

Cette loi permet d'exprimer commodément que les maxima $\lambda_{max}$ des courbes de $M^0_\lambda$ (***fig. 2***) se déplacent vers les petites longueurs d'onde quand la température augmente, selon la relation:

$$\lambda_{max} \times T = 2898 \quad (\mu m.K) \qquad (3)$$

#### *3.2.2.2. Deuxième loi de Wien*

Cette loi fournit l'émittance monochromatique maximale $M^0_{\lambda max}$:

$$M^0_{\lambda max} = B \times T^5 \quad \left(W/_{m^2.\mu m}\right) \qquad (4)$$

avec $B$ une constante qui a pour valeur: $B = 1,287 \times 10^{-11}$ $(W/m^2.\mu m.K^5)$

### *3.2.3. Loi de Stefan-Boltzmann:*

La puissance totale rayonnée, par unité de surface, par un corps noir à la température $T$ est fournie par la loi de ***Stefan-Boltzmann***:

$$M^0(T) = \sigma \times T^4 \qquad (W/m^2) \qquad (5)$$

où $\sigma$ est la constante de ***Stefan-Boltzmann***: $\begin{cases} \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \quad W/m^2.K^4 \\ \sigma = 4,88 \times 10^{-8} \quad Kcal/h.m^2.K^4 \end{cases}$

$M^0(T)$ est appelée ***émittance totale*** du rayonnement du corps noir.

### *3.2.4. Fraction de l'émittance totale contenue dans un intervalle spectral donné: $F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T}$*

La fraction de l'énergie émise par une surface d'un corps noir de température $T$ dans l'intervalle spectral $[\lambda_1, \ \lambda_2]$ est donnée par:

$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M^0_\lambda(\lambda,T) \times d\lambda}{\int_0^{+\infty} M^0_\lambda(\lambda,T) \times d\lambda} = \frac{1}{\sigma.T^4} \times \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M^0_\lambda(\lambda,T) \times d\lambda \qquad (6)$$

que l'on peut également écrire:

$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = \frac{1}{\sigma.T^4} \times \left[\int_0^{\lambda_2} M^0_\lambda(\lambda,T) \times d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M^0_\lambda(\lambda,T) \times d\lambda\right] \qquad (7)$$

Soit encore:

$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T} \qquad (8)$$

Pour pouvoir calculer cette fraction, il serait intéressant de disposer d'une table où $F_{0-\lambda T}$ est donnée en fonction de $\lambda.T$ (voir ***annexe 1***).

➤ ***Exemple d'application 1:***

Le soleil rayonne comme un corps noir à ***T=5800 K***.

1. Calculer l'émittance totale du soleil, $M^0$.
2. Calculer l'émittance monochromatique maximale $M^0_{\lambda max}$ et la longueur d'onde correspondante $\lambda_{max}$.
3. Evaluer la fraction de l'émittance totale du soleil $F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T}$ située dans le domaine visible ***[0,4-0,8] µm***.
4. On a situé l'étendue utile du spectre rayonné par le corps noir à une température $T$ entre les longueurs d'onde $0,5 \times \lambda_{max}$ **et** $5 \times \lambda_{max}$**.** A quel pourcentage de l'énergie totale rayonnée par le corps noir à la température $T$ cela correspond-il?

***Solution:***

1. Emittance totale du soleil: $M^0(T) = \sigma.T^4 \approx 64164 \quad KW/m^2$
2. $M^0_{\lambda \max}$ et $\lambda_{max}$ sont données par les deux lois de ***Wien***:

$$\begin{cases} \lambda_{max} = \dfrac{2898}{T} \approx 0,5\ \mu m \ \rightarrow \ infra-rouge \\ M^0_{\lambda max} = B \times T^5 \approx 84473 \ \left(KW/_{m^2.\mu m}\right) \end{cases}$$

***3.*** On calcule d'abord les paramètres d'entrée:

$$\begin{cases} \lambda_1.T = 2320\ \mu m.K \\ \lambda_2.T = 4640\ \mu m.K \end{cases}$$

La table fournit les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} F_{0-\lambda_1 T} = 0,124 \\ F_{0-\lambda_2 T} = 0,5851 \end{cases} \Rightarrow F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = 0,4611$$

Environ ***46%*** de l'énergie solaire sont rayonnés dans le visible ***[0,4-0,8] $\mu m$***.

***4.*** Calculons $F_{0,5\times\lambda_{max}T-5\times\lambda_{max}T}$:

Les paramètres d'entrée de la table fournissant les $F_{0-\lambda T}$ sont:

$$\begin{cases} 0,5\times\lambda_{max}T = 1450\ \mu m.K \\ 5\times\lambda_{max}T = 14500\ \mu m.K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{0-0,5\times\lambda_{max}T} = 0,0096 \\ F_{0-5\times\lambda_{max}T} = 0,9666 \end{cases} \Rightarrow F_{0,5\times\lambda_{max}T-5\times\lambda_{max}T} = 0,957$$

***C/C:*** L'étendue utile du spectre rayonné par le soleil correspond donc à ***95,7%*** de l'énergie totale rayonnée par le corps noir à la température considérée.

### *4. Rayonnement des corps réels:*

#### *4.1. Emission des corps réels*

Les propriétés radiatives d'émission des corps réels sont définies par rapport à celles du corps noir dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde. Ainsi, on définit l'émissivité $\varepsilon$ d'un corps réel comme le rapport de son ***émittance*** à celle du corps noir.

***Les coefficients d'émission*** ou ***émissivités monochromatique*** $\varepsilon_\lambda$ et ***total*** $\varepsilon$ d'un corps réel sont définis, respectivement, par:

$$\varepsilon_\lambda(\lambda,T) = \frac{M_\lambda(\lambda,T)}{M_\lambda^0(\lambda,T)} \qquad (9-a)$$

et

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)} \qquad (9-b)$$

$M_\lambda(\lambda,T)$ et $M(T)$ sont, respectivement, ***les émittances monochromatique*** et ***totale*** du ***corps réel***.

L'émissivité d'un corps réel peut dépendre également de la direction ; elle est alors appelée ***émissivité directionnelle*** et notée $\varepsilon_{ox}$.

- ***Exemple d'application 2: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013)***

Déterminer l'émissivité totale hémisphérique $\varepsilon$ et l'émittance totale $M$ d'une surface réelle rayonnant à $T = 838\ °C$ dont l'émissivité hémisphérique monochromatique $\varepsilon_\lambda$ est de $0,8$ pour les longueurs d'onde inférieures à $1,5\ \mu m$, de $0,6$ pour les longueurs d'onde de $1,5$ à $2,5\ \mu m$ et de $0,4$ pour les longueurs d'onde supérieures.

***Solution:***

On considère une surface rayonnant à $T = 838°C$ et dont l'émissivité hémisphérique monochromatique $\varepsilon_\lambda$ est constante sur trois bandes spectrales :

$$\varepsilon_\lambda(\lambda,T) = \begin{cases} \varepsilon_1 = 0,8 & (0 < \lambda < 1,5\ (\mu m)) \\ \varepsilon_2 = 0,6 & (1,5 < \lambda < 2,5\ (\mu m)) \\ \varepsilon_3 = 0,4 & (\lambda > 2,5\ (\mu m)) \end{cases}$$

Une telle surface est appelée ***surface semi-grise*** ou ***surface grise par bandes***.

Calculons l'émissivité totale de cette surface pour $\boldsymbol{T = 838°C}$: $\boldsymbol{\varepsilon(T = 838°C)}$

On rappelle que l'émissivité monochromatique $\boldsymbol{\varepsilon_\lambda(\lambda, T)}$ et l'émissivité totale $\boldsymbol{\varepsilon(T)}$ sont définies respectivement par :

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{M_\lambda(\lambda, T)}{M_\lambda^0(\lambda, T)}$$

et

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)}$$

- L'émissivité totale, à la température $\boldsymbol{T}$, de la surface rayonnante (corps réel) est donnée par :

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{1}{M^0(T)} \times \int_0^{+\infty} M_\lambda(\lambda, T).d\lambda = \frac{1}{M^0(T)} \times \int_0^{+\infty} \varepsilon_\lambda(\lambda, T).M_\lambda^0(\lambda, T).d\lambda$$

On pose :

$$\lambda_1 = 1,5\ \mu m \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2,5\ \mu m$$

Donc :

$$\varepsilon(T) = \frac{1}{\sigma \times T^4} \times \left[\varepsilon_1 \times \int_0^{\lambda_1} M_\lambda^0(\lambda, T).d\lambda + \varepsilon_2 \times \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0(\lambda, T).d\lambda + \varepsilon_3 \times \int_{\lambda_2}^{+\infty} M_\lambda^0(\lambda, T).d\lambda\right]$$

D'où :

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_1 \times F_{0-\lambda_1.T} + \varepsilon_2 \times F_{\lambda_1.T-\lambda_2.T} + \varepsilon_3 \times \left(1 - F_{0-\lambda_2.T}\right)$$

Déterminons les valeurs de $\boldsymbol{F_{0-\lambda_1.T}}$ et $\boldsymbol{F_{0-\lambda_2.T}}$

Les paramètres d'entrée de la table donnant ces fractions sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 \times T = 1666,5\ \mu m.K \approx 1670\ \mu m.K \\ \lambda_2 \times T = 2777,5\ \mu m.K \approx 2780\ \mu m.K \end{cases}$$

D'après la table, on a:

$$F_{0-\lambda_1.T} = \frac{F_{0-\lambda.T}(\lambda.T = 1660) + F_{0-\lambda.T}(\lambda.T = 1680)}{2} = \frac{0,0247 + 0,0266}{2} = 0,02565$$

$$F_{0-\lambda_2.T} = 0,2234$$

Il s'en suit que :

$$\varepsilon(T = 838°C) = 0,45$$

- Emittance totale de surface rayonnante :

$$M(T) = \varepsilon(T) \times M^0(T) = \varepsilon(T) \times \sigma \times T^4$$

$$\textit{A.N.}: \ M(T = 838°C) = 38873\ W \approx 39\ KW$$

### *4.2. Corps gris:*

***Un corps gris*** est un corps réel dont les propriétés radiatives (d'émission et de réception) sont indépendantes de la longueur d'onde λ à une température donnée:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\lambda,ox} \rightarrow \varepsilon_{ox} \\ \varepsilon_\lambda \rightarrow \varepsilon \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha_{\lambda,ox} \rightarrow \alpha_{ox} \\ \alpha_\lambda \rightarrow \alpha \end{cases}.$$

Le corps gris est un cas particulier (usuel) comme les cas suivants:

- Corps réel et ***diffusant*** en émission et en réception (***isotrope***) : émissivité et absorptivité indépendantes de la direction de propagation du rayonnement.

$$\begin{cases} \varepsilon_{\lambda,ox} \rightarrow \varepsilon_\lambda \\ \varepsilon_{ox} \rightarrow \varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_{\lambda,ox} \rightarrow \alpha_\lambda \\ \alpha_{ox} \rightarrow \alpha \end{cases}$$

- Corps ***gris*** et ***diffusant*** en émission et en réception: émissivité indépendante de la longueur d'onde et de la direction de propagation du rayonnement.

$$\varepsilon_{\lambda,ox} \rightarrow \varepsilon \quad \text{et} \quad \alpha_{\lambda,ox} \rightarrow \alpha$$

### *4.3. Loi de Kirchhoff:*

La loi de ***Kirchhoff*** indique que les coefficients d'émission et d'absorption sont égaux pour la même longueur d'onde et la même direction de propagation du rayonnement émis par la surface d'un corps ou incident sur celle-ci.

$$\varepsilon_{\lambda,ox} = \alpha_{\lambda,ox} \qquad (10)$$

***Les corps réels*** peuvent, en général, *être assimilés* à des ***corps gris et diffusant*** (propriétés radiatives indépendantes de la direction). *Un corps réel* est alors caractérisé *par une seule grandeur radiative: son émissivité* $\varepsilon$.

$$\alpha = \varepsilon \qquad (11)$$

***Relations générales entre l'absorptivité et l'émissivité***

- Pour un corps réel quelconque: $\varepsilon \neq \alpha$
- Pour un corps gris et diffusant: $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda = \varepsilon = \alpha < 1$
- Pour un corps noir: $\varepsilon = \alpha = 1$

Dans le tableau suivant, on donne l'émissivité totale hémisphérique $\varepsilon$ pour quelques corps (à $T = 20°C$).

| Matériaux | Etat de surface | ε |
|---|---|---|
| Aluminium | Poli | 0,06 |
| | oxydé | 0,30 |
| Cuivre | Poli | 0,04 |
| | Très oxydé | 0,75 |
| Or | Pur très poli | 0,02 |
| Argent | poli | 0,02 |
| Zinc | Pur très poli | 0,02 |
| | Galvanisé | 0,2-0,3 |
| Brique | Ordinaire | 0,93 |
| | Réfractaire (à 1000°C) | 0,6 |
| Carbone (dépôt de noir de fumée) | | 0,95-0,98 |
| Verre ordinaire | | 0,94 |
| Marbre | | 0,95 |
| Peintures | Aluminium | 0,30-0,60 |
| | Noire | 0,98 |
| | Blanche | 0,90 |
| | Peintures à l'huile toutes couleurs | ~0,90 |
| Papier | | 0,95 |

### 5. Echanges radiatifs entre surfaces séparées par un milieu parfaitement transparent:

On rappelle qu'un milieu matériel ***parfaitement transparent*** ($\tau = 1$) est un milieu ***non absorbant*** (***ni émissif***: $\alpha = \varepsilon = 0$) et ne participe donc pas aux échanges radiatifs. L'air et les gaz simples en sont des exemples.

On se propose d'étudier les échanges radiatifs entre surfaces séparées par un milieu ***parfaitement transparent***. Cette situation est très largement rencontrée dans la pratique. En effet, on trouve de nombreuses applications industrielles pour lesquelles les échanges radiatifs entre surfaces sont peu affectés par le milieu transparent qui les sépare.

Les surfaces seront d'abord supposées ***noires***, ensuite ***grises*** et ***diffusantes*** en ***émission*** et en ***réflexion***.

***Hypothèses simplificatrices***:

Toutes les surfaces considérées seront supposées ***opaques***, ***isothermes***, ***homogènes*** et ***diffusantes***.

#### 5.1. Echanges radiatifs entre surfaces noires:

##### 5.1.1. Facteur de forme géométrique entre deux surfaces $F_{ij}$:

Considérons deux surfaces noires $S_i$ et $S_j$ maintenues à des températures uniformes $T_i$ et $T_j$ et pouvant rayonner mutuellement l'une vers l'autre. Soit $\Phi_i = S_i \times M_i^0$ le flux total émis par $S_i$, dont seule une partie $\Phi_{ij}$ est reçue par $S_j$.

On appelle ***facteur de forme*** de $S_i$ vers $S_j$ le rapport:

$$F_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{\Phi_i} \qquad (12)$$

Ainsi:

$$0 \leq F_{ij} \leq 1$$

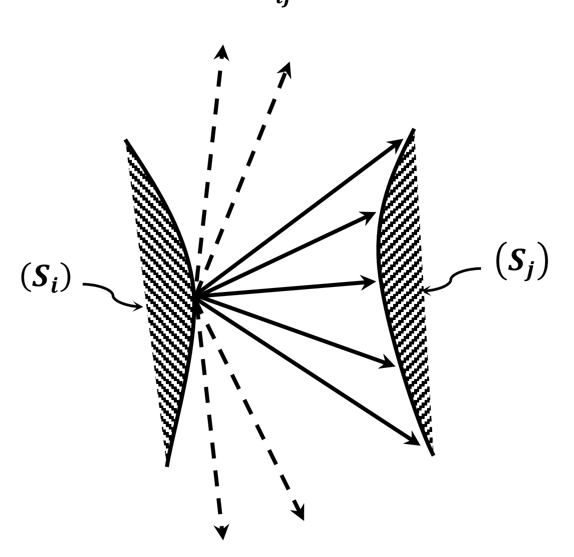



***Figure 3: Echanges radiatifs entre deux surfaces $S_i$ et $S_j$.***

$F_{ij}$ est un nombre sans dimension représentant la fraction du rayonnement émis par la surface $S_i$ dans toutes les directions interceptées par la surface $S_j$. Ce facteur de forme ne dépend que de la géométrie et de la disposition relative des surfaces rayonnantes.

##### 5.1.2. Propriétés des facteurs de forme

###### 5.1.2.1. Règle de réciprocité

Les facteurs de forme entre deux surfaces $S_i$ et $S_j$ vérifient la relation suivante désignée sous le nom de ***règle de réciprocité***:

$$S_i . F_{ij} = S_j . F_{ji} \qquad (13)$$

### *5.1.2.2. Règle de complémentarité ou d'addition:*

Considérons une enceinte fermée constituée de $N$ surfaces noires $S_1$, $S_2$, ..., $S_i$, ... $S_N$, individuellement isothermes (***figure 4***). La définition du facteur de forme géométrique induit immédiatement ***la règle de complémentarité***:

On a:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij} = \sum_{j=1}^{N} (F_{ij} \times \Phi_i) = \Phi_i \times \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \qquad avec\ i = 1, 2 \dots N$$

Donc:

$$\sum_{j=1}^{N} F_{1j} = \sum_{j=1}^{N} F_{2j} = \cdots = \sum_{j=1}^{N} F_{ij} = \cdots = \sum_{j=1}^{N} F_{Nj} = 1$$

C'est-à-dire, la somme des facteurs de forme associés à une surface $S_i$ (avec $i = 1, 2 \dots N$) est telle que :

$$\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1 \qquad (14)$$

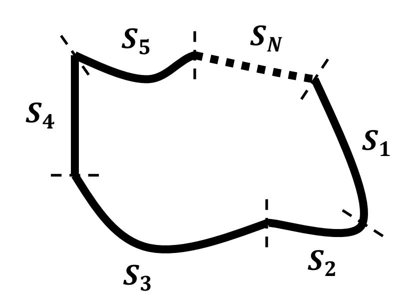



***Figure 4: Enceinte fermée constituée de N surfaces noires.***

### *5.1.2.3. Règle de décomposition*

Considérons deux surfaces $S_i$ et $S_j$. Si $S_i$ se décompose en deux surfaces $S_{i,a}$ et $S_{i,b}$ ***(figure 5)***, on peut écrire:

$$S_i . F_{ij} = S_{i,a} . F_{i,a\,j} + S_{i,b} . F_{i,b\,j} \qquad (15)$$

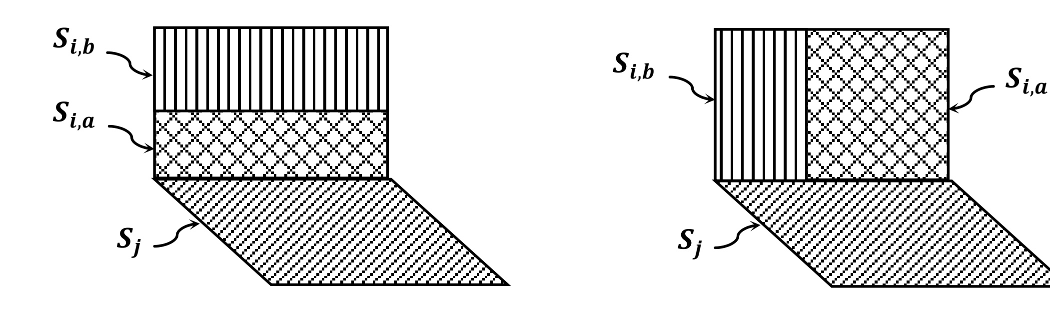



***Figure 5:***

***Ces règles sont utiles pour la détermination des facteurs de forme géométrique de plusieurs surfaces en présence.***

➤ ***Remarque:***

- Le facteur de forme $F_{ii}$ d'une surface $S_i$ sur elle-même *est **nul*** lorsque cette surface est ***plane*** *ou* ***convexe***.

- $F_{ii}$ est différent de ***0*** quand $S_i$ est ***concave***.

### *5.1.3. Quelques facteurs de formes géométriques:*

Il existe dans la littérature des tables et des abaques qui fournissent des valeurs approchées des facteurs de forme géométriques $F_{ij}$. On donne ici quelques formules utiles permettant de calculer $F_{ij}$ dans de le cas de configurations simples.

- une surface convexe $S_2$ à l'intérieur d'une cavité $S_1$ ***(figure 6)***:

$$\begin{cases} F_{11} = 0 \quad et \quad F_{12} = 1 \\ F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \quad et \;\; F_{22} = 1 - \frac{S_1}{S_2} \end{cases}$$

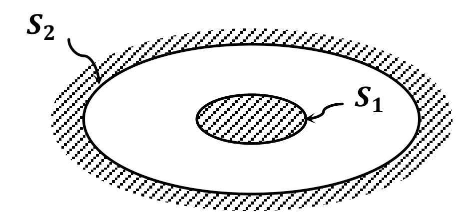



***Figure 6:***

- Deux surfaces délimitant un volume clos, l'une n'étant pas concave ***S₁ (figure 7):***

$$\begin{cases} F_{11} = 0 \quad et \quad F_{12} = 1 \\ F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \quad et \;\; F_{22} = 1 - \frac{S_1}{S_2} \end{cases}$$

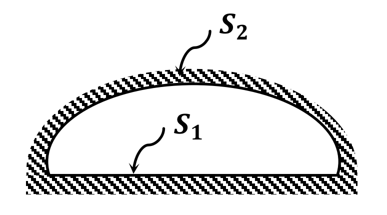
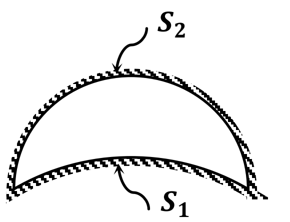



***Figure 7:***




- Plans parallèles proches ***(figure 8)****:* effets de bord négligeables

$$F_{11} = 0, \;\; F_{12} = 1, \;\; F_{21} = 1 \text{ et } F_{22} = 0$$




***Figure 8:***

- Cylindres parallèles, emboîtés, de grande longueur, quelle que soit la distance $\delta$ de leurs axes ***(figure 9)***:

$$F_{11} = 0, \qquad F_{12} = 1, \qquad F_{21} = \frac{R_1}{R_2} \quad et \;\; F_{22} = 1 - \frac{R_1}{R_2}$$

- Sphères emboîtées, quelle que soit la distance $\delta$ de leurs centres ***(figure 9)***:

$$F_{11} = 0, \qquad F_{12} = 1, \qquad F_{21} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \quad et \;\; F_{22} = 1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

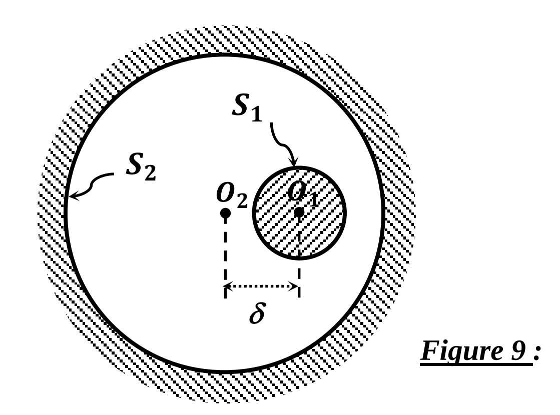



***Figure 9 :***

- ***Exemple d'application: (Voir TD, série n°1)***

### *5.1.4. Flux radiatif net échangé entre surfaces noires*

#### *a) Cas de deux surfaces noires $S_i$ et $S_j$*

Les deux surfaces en vis-à-vis étant noires, donc tout rayonnement reçu par l'une ou l'autre est entièrement absorbé (il n'y a pas de réflexion ni de transmission).

***Le flux radiatif net*** transféré de $S_i$ vers $S_j$, noté $\Phi_{r,net:\,i\to j}$, s'obtient en faisant un bilan entre le flux émis par $S_i$ vers $S_j$ (perte d'énergie thermique pour $S_i$) et le flux absorbé par $S_i$ en provenance de $S_j$ (gain d'énergie thermique pour $S_i$). Il est donné par la relation:

$$\Phi_{r,net:\,i\to j} = \Phi_{ij} - \Phi_{ji} = F_{ij} \times \Phi_i - F_{ji} \times \Phi_j = S_i.F_{ij} \times M_i^o - S_j.F_{ji} \times M_j^o$$

En tenant en compte de ***la règle de réciprocité*** et de la loi de ***Stefan-Boltzmann***, l'expression de $\Phi_{r,net:\,i\to j}$ devient :

$$\Phi_{r,net:\,i\to j} = S_i.F_{ij} \times \left(M_i^o - M_j^o\right) = S_i.F_{ij} \times \sigma \times \left(T_i^4 - T_j^4\right) \qquad (16)$$

On remarque que :

$$\Phi_{r,net:\,j\to i} = -\Phi_{r,net:\,i\to j}$$

#### *b) Cas d'une enceinte noire fermée*

Considérons une enceinte fermée constituée de ***N*** surfaces noires $S_1$, $S_2$, ..., $S_i$,... $S_N$, individuellement isothermes, aux températures $T_1$, $T_2$, ..., $T_i$,... $T_N$ (***figure 4***). Dans la pratique, on est amené dans certaines situations à combler les espaces vides entre les surfaces (constituant l'enceinte) à l'aide de surfaces fictives isothermes de température égale à celle du milieu ambiant où se trouve placée l'enceinte. C'est, par exemple, le cas d'un four fonctionnant à porte ouverte (***voir TD***).

Nôtre objectif est de trouver l'expression du flux radiatif net échangé par chaque surface de l'enceinte. Pour cela, faisons un bilan des échanges radiatifs sur la surface $S_i$; cette surface émet un flux total $\Phi_i$ et absorbe, en provenance de toutes les surfaces composant l'enceinte, y compris elle-même si elle est concave ($F_{ii} \neq 0$), des flux $\Phi_{ji}$ ($j = 1, 2 \ldots N$). Le flux radiatif net échangé par la surface est:

$$\Phi_{r,net,i} = \Phi_i - \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ji} = \Phi_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ji}.\Phi_j = S_i.M_i^o - \sum_{j=1}^{N} F_{ji}.S_j.M_j^o$$

soit, compte tenu des règles de réciprocité et de complémentarité:

$$\Phi_{r,net,i} = S_i \times \left(M_i^o - \sum_{j=1}^{N} F_{ij}.M_j^o\right) = S_i \times \sum_{j=1}^{N} F_{ij}.\left(M_i^o - M_j^o\right) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{r,net:\,i\to j} \qquad (17-a)$$

soit, compte tenu de la loi de ***Stefan-Boltzmann***:

$$\Phi_{r,net,i} = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{r,net:\,i\rightarrow j} = S_i \times \sigma \times \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \times \left(T_i^4 - T_j^4\right) \qquad (17-b)$$

### *5.1.5. Représentation des échanges radiatifs entre surfaces noires par analogie électrique*

On remarque que la relation exprimant le flux échangé entre deux surfaces noires $S_i$ et $S_j$

$$\Phi_{r,net:\,i\rightarrow j} = S_i.F_{ij} \times \left(M_i^o - M_j^o\right) = \frac{M_i^o - M_j^o}{\frac{1}{S_i.F_{ij}}} = \frac{M_i^o - M_j^o}{\frac{1}{S_j.F_{ji}}} \quad (18)$$

est analogue à la relation exprimant le courant électrique $I_{ij}$ qui circule dans un réseau électrique entre deux nœuds de potentiels $V_i$ et $V_j$ séparés par une résistance $R_{ij}$.

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$

L'échange radiatif entre deux surfaces noires $S_i$ et $S_j$ peut donc être représenté à l'aide du schéma électrique analogique suivant (***figure 10***):

$M_i^o$ — $\frac{1}{S_i.F_{ij}}$ ou $\frac{1}{S_j.F_{ji}}$ — $M_j^o$ ; $\Phi_{r,net:\,1\rightarrow 2}$

***Figure 10 :***

L'échange radiatif entre trois surfaces noires $S_1$, $S_2$ et $S_3$ constituant une enceinte fermée peut être représenté par le schéma suivant (***figure 11***):

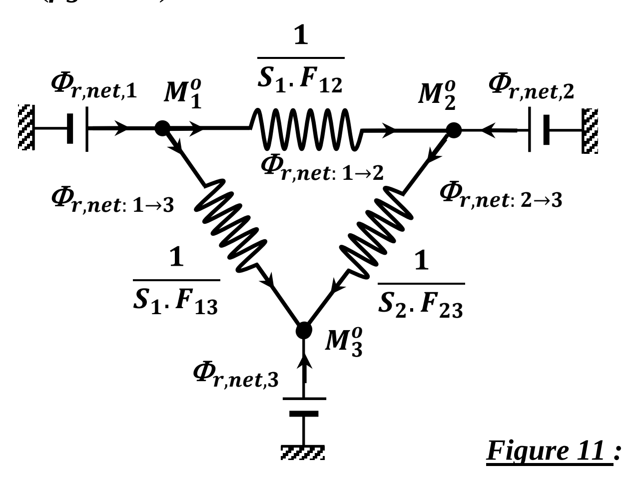



***Figure 11 :***

- Le flux total émis par $S_1$ est donné par:

$$\Phi_{r,net,1} = \sum_{j=1}^{3} \Phi_{r,net:\,1\rightarrow j} = \underbrace{\Phi_{r,net:\,1\rightarrow 1}}_{=0} + \Phi_{r,net:\,1\rightarrow 2} + \Phi_{r,net:\,1\rightarrow 3} = \Phi_{r,net:\,1\rightarrow 2} + \Phi_{r,net:\,1\rightarrow 3}$$

$$\Phi_{r,net,1} = S_1.F_{12}.\left(M_1^o - M_2^o\right) + S_1.F_{13}.\left(M_1^o - M_3^o\right) = S_1.\sigma.\left(F_{12}.\left(T_1^4 - T_2^4\right) + F_{13}.\left(T_1^4 - T_3^4\right)\right)$$

- Le flux total émis par $S_2$ est donné par:

$$\boldsymbol{\Phi}_{r,net,2} = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,2\to j} = \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,2\to 1} + \underbrace{\boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,2\to 2}}_{=0} + \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,2\to 3} = \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,2\to 1} + \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,2\to 3}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{r,net,2} = S_2.F_{21}.(M_2^o - M_1^o) + S_2.F_{23}.(M_2^o - M_3^o) = S_2.\sigma.\left(F_{21}.(T_2^4 - T_1^4) + F_{23}.(T_2^4 - T_3^4)\right)$$

- Le flux total émis par $S_3$ est donné par:

$$\boldsymbol{\Phi}_{r,net,3} = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,3\to j} = \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,3\to 1} + \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,3\to 2} + \underbrace{\boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,3\to 3}}_{=0} = \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,3\to 1} + \boldsymbol{\Phi}_{r,net:\,3\to 2}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{r,net,3} = S_3.F_{31}.(M_3^o - M_1^o) + S_3.F_{32}.(M_3^o - M_2^o) = S_3.\sigma.\left(F_{31}.(T_3^4 - T_1^4) + F_{32}.(T_3^4 - T_2^4)\right)$$

- ***Exemples d'application:*** **(*voir TD, série n°1*)**

### *5.2. Echanges radiatifs entre surfaces grises:*

On s'intéresse à l'étude des échanges radiatifs entre surfaces ***grises*** et ***diffusantes*** en ***émission*** et en ***réflexion***, séparées par un milieu parfaitement transparent à toute longueur d'onde.

#### *5.2.1. Notion de radiosité d'une surface grise (réelle)*

On rappelle que si $\boldsymbol{\Phi}_i$ est le flux incident sur une surface ***opaque*** d'aire $S$, seule une fraction $\boldsymbol{\Phi}_a$ est absorbée, une fraction $\boldsymbol{\Phi}_r$ étant réfléchie.

L'***éclairement***, noté $E$ ,de la surface $S$ correspond à la quantité :

$$E = \frac{\boldsymbol{\Phi}_i}{S} \quad (W/m^2) \quad (19)$$

***L'émittance*** de cette surface est :

$$M = \varepsilon \times M^0 = \varepsilon \times \sigma \times T^4 \quad (W/m^2)$$

La radiosité, notée $J$, de la surface $S$ est le flux total émis par cette surface (***figure 12***):. Ce flux total résulte pour une part de l'émission propre de la surface (émittance $M$) et pour une autre part de la fraction de l'éclairement qu'elle réfléchit ($\rho \times E$):

$$J = M + \rho \times E = \varepsilon \times M^0 + \rho \times E \qquad (W/m^2) \quad (20)$$

*Partie réfléchie de l'éclairement* $(\rho.E)$
*Radiosité* $(J)$
*Eclairement incident* $(E)$
*Emission propre* $(M)$
*Corps opaque*
*Partie absorbée de l'éclairement* $(\alpha.E)$

***Figure 12 :***

La surface en question est opaque, grise et diffusante en émission et réflexion, donc:

$$\tau = 0 \quad \text{et} \quad \rho = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon$$

Par suite :

$$J = \varepsilon \times M^0 + (1 - \varepsilon) \times E \qquad (W/m^2) \qquad (21)$$

Le flux total issu d'une surface grise diffusante d'aire $\boldsymbol{S}$ est égal à :

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{J} = \boldsymbol{S} \times \left(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{M^0} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}) \times \boldsymbol{E}\right) \qquad (\boldsymbol{W})$$

***Le flux radiatif net*** $\boldsymbol{\Phi_{r,net}}$ perdu par la surface grise $\boldsymbol{S}$ est égal à la différence entre le flux émis et le flux absorbé par cette surface, soit :

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net}} = \left(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{M^0}\right) - (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \left(\boldsymbol{M^0} - \boldsymbol{E}\right) \qquad (\boldsymbol{W}) \quad (\mathbf{22})$$

Eliminons l'éclairement $\boldsymbol{E}$ de cette relation en la remplaçant par son expression tirée de $(\mathbf{21})$, on obtient :

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net}} = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \left(\boldsymbol{M^0} - \frac{\boldsymbol{J} - \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{M^0}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \frac{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}} \times \left(\boldsymbol{M^0} - \boldsymbol{J}\right) \qquad (\mathbf{23})$$

En éliminant $\boldsymbol{M^0}$ de cette relation, on obtient :

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net}} = \boldsymbol{S} \times (\boldsymbol{J} - \boldsymbol{E}) \qquad (\mathbf{24})$$

Ainsi, le flux radiatif net perdu, par unité de surface, par une surface grise $\boldsymbol{S}$ est aussi égal à la différence entre sa radiosité $\boldsymbol{J}$ (densité de flux de chaleur quittant la surface par émission et réflexion) et son éclairement $\boldsymbol{E}$ (densité de flux arrivant sur la surface).

On dispose donc de trois relations distinctes fournissant le flux net rayonné par une surface opaque grise et diffusante $\boldsymbol{S_i}$:

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net,i}} = \boldsymbol{S_i} \times \boldsymbol{\varepsilon_i} \times \left(\boldsymbol{M_i^0} - \boldsymbol{E_i}\right) = \frac{\boldsymbol{S_i} \times \boldsymbol{\varepsilon_i}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon_i}} \times \left(\boldsymbol{M_i^0} - \boldsymbol{J_i}\right) = \boldsymbol{S_i} \times (\boldsymbol{J_i} - \boldsymbol{E_i}) \qquad (\mathbf{25})$$

### *5.2.2. Représentation des échanges radiatifs entre surfaces grises par analogie électrique*

L'expression du flux net rayonné par une surface grise et diffusante $\boldsymbol{S_i}$

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net,i}} = \frac{\boldsymbol{S_i} \times \boldsymbol{\varepsilon_i}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon_i}} \times \left(\boldsymbol{M_i^0} - \boldsymbol{J_i}\right) = \frac{\boldsymbol{M_i^0} - \boldsymbol{J_i}}{\frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon_i}}{\boldsymbol{S_i} \times \boldsymbol{\varepsilon_i}}} \qquad (\mathbf{26})$$

peut être interprétée, en termes d'analogie électrique, à l'aide d'un circuit dans lequel une résistance $\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\varepsilon_i}}{\boldsymbol{S_i}\times\boldsymbol{\varepsilon_i}}$ , soumise à une différence de potentiel $\boldsymbol{M_i^0} - \boldsymbol{J_i}$, est traversée par un courant égal à $\boldsymbol{\Phi_{r,net,i}}$ (***figure 13***).

$\frac{1-\varepsilon_i}{S_i \times \varepsilon_i}$
$M_i^0$ $J_i$
$\Phi_{r,net,i}$

***Figure 13 :***

Considérons deux surfaces grises et diffusantes $\boldsymbol{S_i}$ et $\boldsymbol{S_j}$ rayonnant l'une vers l'autre. Le flux total quittant la surface $\boldsymbol{S_i}$ est $\boldsymbol{S_i} \times \boldsymbol{J_i}$. Seule la fraction $\boldsymbol{F_{ij}}$ de ce flux atteint la surface $\boldsymbol{S_j}$, donc le flux issu de $\boldsymbol{S_i}$ et arrivant sur $\boldsymbol{S_j}$ est $\boldsymbol{S_i} \times \boldsymbol{F_{ij}} \times \boldsymbol{J_i}$. Réciproquement, le flux quittant $\boldsymbol{S_j}$et atteignant $\boldsymbol{S_i}$ est $\boldsymbol{S_j} \times \boldsymbol{F_{ji}} \times \boldsymbol{J_j}$. Le flux radiatif net échangé entre $\boldsymbol{S_i}$ et $\boldsymbol{S_j}$ a pour expression :

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net:i\to j}} = \boldsymbol{S_i} \times \boldsymbol{F_{ij}} \times \left(\boldsymbol{J_i} - \boldsymbol{J_j}\right) \qquad (\mathbf{27})$$

Cet échange peut être représenté à l'aide du schéma électrique suivant :

$\frac{1}{S_i \times F_{ij}}$
$J_i$ $J_j$
$\Phi_{r,net:\,i\to j}$

***Figure 14 :***

Par conséquent, le schéma électrique complet représentant les échanges radiatifs entre deux surfaces grises et diffusantes en vis-à-vis est illustré sur ***la figure 15***.

$\Phi_{r,net,i}$ $\Phi_{r,net:\,i\to j}$ $-\Phi_{r,net,j}$

$M_i^o$ $J_i$ $J_j$ $M_j^o$

$\frac{1-\varepsilon_i}{S_i\times\varepsilon_i}$ $\frac{1}{S_i.F_{ij}}$ $\frac{1-\varepsilon_j}{S_j\times\varepsilon_j}$

***Figure 15:***

Dans ce cas, on a :

$$\Phi_{r,net:\,i\to j}=\frac{M_i^o-M_j^o}{\frac{1-\varepsilon_i}{S_i\times\varepsilon_i}+\frac{1}{S_i.F_{ij}}+\frac{1-\varepsilon_j}{S_j\times\varepsilon_j}}=\frac{S_i\times\sigma\times\left(T_i^4-T_j^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_i}-1+\frac{1}{F_{ij}}+\frac{S_i}{S_j}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_j}-1\right)}\qquad(28)$$

### *5.2.2.1. Facteur de forme gris $\mathcal{F}_{ij}$:*

Par analogie avec l'échange radiatif entre deux surfaces noires, on introduit le facteur de forme gris, noté $\mathcal{F}_{ij}$, défini par:

$$\mathcal{F}_{ij}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_i}-1+\frac{1}{F_{ij}}+\frac{S_i}{S_j}\left(\frac{1}{\varepsilon_j}-1\right)}\qquad(29)$$

### *5.2.2.2. Quelques facteurs de formes gris:*

- Plans parallèles proches (effets de bord négligeables): $F_{12}=1$ et $S_1\approx S_2$.

$$\mathcal{F}_{12}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1}\qquad(30)$$

- Cylindres parallèles, emboîtés, de grande longueur, quelle que soit la distance $\delta$ de leurs axes: ( $F_{12}=1$ et $\frac{S_1}{S_2}=\frac{R_1}{R_2}$ )

$$\mathcal{F}_{12}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-1\right)}\qquad(31)$$

- Sphères emboîtées, quelle que soit la distance $\delta$ de leurs centres: ( $F_{12}=1$ et $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$ )

$$\mathcal{F}_{12}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-1\right)}\qquad(32)$$

Pour une surface grise $S_i$ échangeant du rayonnement avec $N$ surfaces grises, le flux radiatif net s'écrit:

$$\Phi_{r,net,i}=\sum_{j=1}^{N}\Phi_{r,net:\,i\to j}$$

$$\Phi_{r,net,i} = \frac{M_i^0 - J_i}{\frac{1-\varepsilon_i}{S_i \times \varepsilon_i}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{S_i \times F_{ij}}} \qquad (33)$$

L'échange radiatif entre trois surfaces grises $S_1$, $S_2$ et $S_3$ constituant une enceinte fermée peut être représenté par le schéma suivant :

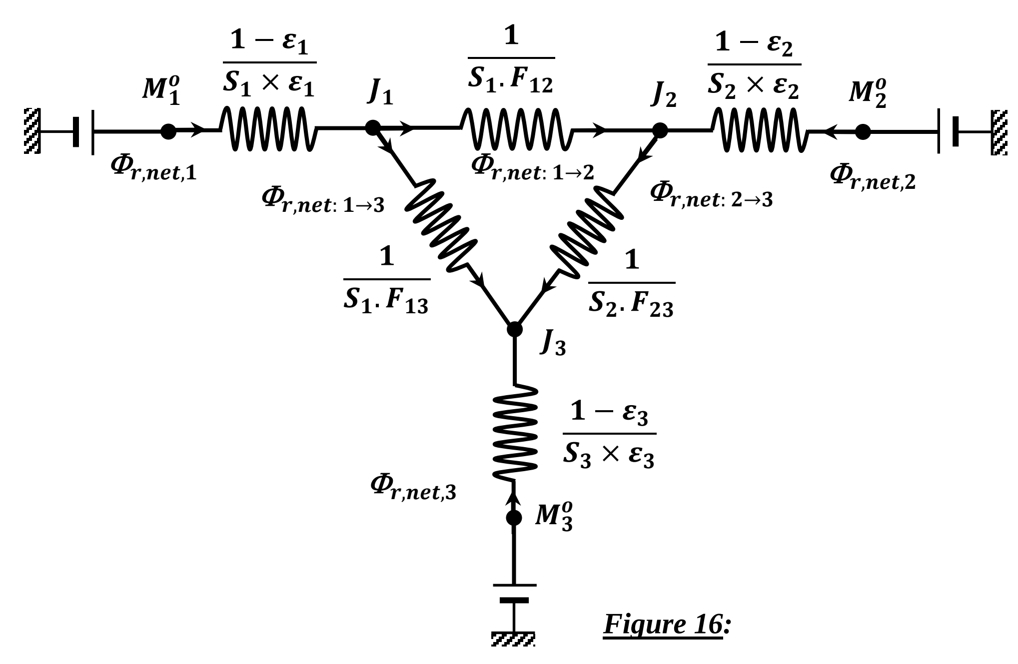



***Figure 16:***

Par exemple, le flux total émis par $S_1$ est donné par:

$$\Phi_{r,net,1} = \sum_{j=1}^{3} \Phi_{r,net:1\to j}$$

$$\Phi_{r,net,1} = \frac{M_1^0 - J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{S_1 \times \varepsilon_1}} = \sum_{j=1}^{3} \frac{J_1 - J_j}{\frac{1}{S_1 \times F_{1j}}}$$

- ***Exemples d'application:*** (**voir TD, série n°1**)

# *ANNEXE 1*

## *TABLE: VALEURS DE LA FONCTION $F_{0-\lambda T}(\lambda T)$, FRACTION DE L'EMITTANCE DU CORPS NOIR CORRESPONDANT AUX LONGUEURS D'ONDE INFERIEURES A UNE VALEUR $\lambda$ (POUR UNE TEMPERATURE T DONNEE)*

| $\lambda T$ ($\mu$m.K) | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | $\lambda T$ ($\mu$m.K) | 0 | 20 ou 200$^{(*)}$ ou 2000$^{(+)}$ | 40 ou 400$^{(*)}$ ou 4000$^{(+)}$ | 60 ou 600$^{(*)}$ ou 6000$^{(+)}$ | 80 ou 800$^{(*)}$ ou 8000$^{(+)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **500** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | **6200** | 0,7541 | 0,7556 | 0,7572 | 0,7587 | 0,7603 |
| **600** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | **6300** | 0,7618 | 0,7633 | 0,7648 | 0,7662 | 0,7677 |
| **700** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | **6400** | 0,7692 | 0,7706 | 0,7721 | 0,7735 | 0,7749 |
| **800** | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | **6500** | 0,7763 | 0,7777 | 0,7791 | 0,7804 | 0,7818 |
| **900** | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | **6600** | 0,7831 | 0,7845 | 0,7858 | 0,7871 | 0,7884 |
| **1000** | 0,0003 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0007 | **6700** | 0,7897 | 0,7910 | 0,7923 | 0,7936 | 0,7948 |
| **1100** | 0,0004 | 0,0010 | 0,0013 | 0,0015 | 0,0018 | **6800** | 0,7961 | 0,7973 | 0,7985 | 0,7998 | 0,8010 |
| **1200** | 0,0021 | 0,0024 | 0,0028 | 0,0033 | 0,0037 | **6900** | 0,8022 | 0,8034 | 0,8045 | 0,8057 | 0,8069 |
| **1300** | 0,0043 | 0,0049 | 0,0055 | 0,0062 | 0,0069 | **7000** | 0,8080 | 0,8092 | 0,8103 | 0,8115 | 0,8126 |
| **1400** | 0,0076 | 0,0086 | 0,0096 | 0,0106 | 0,0117 | **7100** | 0,8137 | 0,8148 | 0,8159 | 0,8170 | 0,8181 |
| **1500** | 0,0128 | 0,0140 | 0,0153 | 0,0167 | 0,0182 | **7200** | 0,8191 | 0,8202 | 0,8213 | 0,8223 | 0,8234 |
| **1600** | 0,0197 | 0,0213 | 0,0230 | 0,0247 | 0,0266 | **7300** | 0,8244 | 0,8254 | 0,8264 | 0,8275 | 0,8285 |
| **1700** | 0,0285 | 0,0305 | 0,0326 | 0,0347 | 0,0370 | **7400** | 0,8295 | 0,8304 | 0,8314 | 0,8324 | 0,8334 |
| **1800** | 0,0393 | 0,0417 | 0,0442 | 0,0467 | 0,0494 | **7500** | 0,8343 | 0,8353 | 0,8362 | 0,8372 | 0,8381 |
| **1900** | 0,0521 | 0,0549 | 0,0577 | 0,0606 | 0,0636 | **7600** | 0,8390 | 0,8399 | 0,8409 | 0,8418 | 0,8427 |
| **2000** | 0,0667 | 0,0698 | 0,0730 | 0,0763 | 0,0796 | **7700** | 0,8436 | 0,8444 | 0,8453 | 0,8462 | 0,8471 |
| **2100** | 0,0630 | 0,0865 | 0,0900 | 0,0936 | 0,0972 | **7800** | 0,8479 | 0,8488 | 0,8496 | 0,8505 | 0,8513 |
| **2200** | 0,1009 | 0,1045 | 0,1084 | 0,1122 | 0,1161 | **7900** | 0,8521 | 0,8530 | 0,8538 | 0,8546 | 0,8554 |
| **2300** | 0,1200 | 0,1240 | 0,1280 | 0,1320 | 0,1361 | **8000** | 0,8562 | 0,8570 | 0,8578 | 0,8586 | 0,8594 |
| **2400** | 0,1402 | 0,1444 | 0,1486 | 0,1528 | 0,1571 | **8100** | 0,8601 | 0,8609 | 0,8617 | 0,8624 | 0,8632 |
| **2500** | 0,1613 | 0,1656 | 0,1700 | 0,1743 | 0,1787 | **8200** | 0,8639 | 0,8647 | 0,8654 | 0,8661 | 0,8669 |
| **2600** | 0,1831 | 0,1875 | 0,1920 | 0,1964 | 0,2009 | **8300** | 0,8676 | 0,8683 | 0,8690 | 0,8697 | 0,8704 |
| **2700** | 0,2053 | 0,2098 | 0,2143 | 0,2188 | 0,2234 | **8400** | 0,8711 | 0,8718 | 0,8725 | 0,8732 | 0,8738 |
| **2800** | 0,2279 | 0,2324 | 0,2369 | 0,2415 | 0,2460 | **8500** | 0,8745 | 0,8752 | 0,8759 | 0,8765 | 0,8772 |
| **2900** | 0,2506 | 0,2551 | 0,2596 | 0,2642 | 0,2687 | **8600** | 0,8778 | 0,8785 | 0,8791 | 0,8797 | 0,8804 |
| **3000** | 0,2732 | 0,2778 | 0,2823 | 0,2868 | 0,2913 | **8700** | 0,8810 | 0,8816 | 0,8822 | 0,8829 | 0,8835 |
| **3100** | 0,2958 | 0,3003 | 0,3047 | 0,3092 | 0,3137 | **8800** | 0,8841 | 0,8847 | 0,8853 | 0,8859 | 0,8865 |
| **3200** | 0,3181 | 0,3225 | 0,3269 | 0,3313 | 0,3357 | **8900** | 0,8871 | 0,8877 | 0,8882 | 0,8888 | 0,8894 |
| **3300** | 0,3401 | 0,3445 | 0,3488 | 0,3531 | 0,3574 | **9000** | 0,8899 | 0,8905 | 0,8911 | 0,8916 | 0,8922 |
| **3400** | 0,3617 | 0,3660 | 0,3703 | 0,3745 | 0,3787 | **9100** | 0,8927 | 0,8933 | 0,8938 | 0,8943 | 0,8949 |
| **3500** | 0,3829 | 0,3871 | 0,3912 | 0,3954 | 0,3995 | **9200** | 0,8954 | 0,8959 | 0,8965 | 0,8970 | 0,8975 |
| **3600** | 0,4036 | 0,4077 | 0,4117 | 0,4158 | 0,4198 | **9300** | 0,8980 | 0,8985 | 0,8990 | 0,8995 | 0,9000 |
| **3700** | 0,4238 | 0,4277 | 0,4317 | 0,4356 | 0,4395 | **9400** | 0,9005 | 0,9010 | 0,9015 | 0,9020 | 0,9025 |
| **3800** | 0,4434 | 0,4472 | 0,4511 | 0,4549 | 0,4585 | **9500** | 0,9030 | 0,9035 | 0,9039 | 0,9044 | 0,9049 |
| **3900** | 0,4624 | 0,4661 | 0,4699 | 0,4736 | 0,4772 | **9600** | 0,9054 | 0,9058 | 0,9063 | 0,9067 | 0,9072 |
| **4000** | 0,4809 | 0,4845 | 0,4881 | 0,4917 | 0,4952 | **9700** | 0,9076 | 0,9081 | 0,9085 | 0,9090 | 0,9094 |
| **4100** | 0,4987 | 0,5022 | 0,5057 | 0,5092 | 0,5126 | **9800** | 0,9099 | 0,9103 | 0,9107 | 0,9112 | 0,9116 |
| **4200** | 0,5160 | 0,5194 | 0,5227 | 0,5261 | 0,5294 | **9900** | 0,9120 | 0,9124 | 0,9129 | 0,9133 | 0,9137 |
| **4300** | 0,5327 | 0,5359 | 0,5392 | 0,5424 | 0,5456 | **10000** | 0,9141 | 0,9181 | 0,9218 | 0,9253 | 0,9287 |
| **4400** | 0,5488 | 0,5519 | 0,5551 | 0,5582 | 0,5612 | **11000** | 0,9318 | 0,9347 | 0,9375 | 0,9401 | 0,9426 |
| **4500** | 0,5643 | 0,5673 | 0,5703 | 0,5733 | 0,5763 | **12000** | 0,9450 | 0,9472 | 0,9493 | 0,9513 | 0,9532 |
| **4600** | 0,5793 | 0,5822 | 0,5851 | 0,5880 | 0,5908 | **13000** | 0,9550 | 0,9567 | 0,9584 | 0,9599 | 0,9614 |
| **4700** | 0,5937 | 0,5965 | 0,5993 | 0,6020 | 0,6048 | **14000** | 0,9628 | 0,9641 | 0,9654 | 0,9666 | 0,9678 |
| **4800** | 0,6075 | 0,6102 | 0,6129 | 0,6156 | 0,6182 | **15000** | 0,9689 | 0,9699 | 0,9709 | 0,9719 | 0,9728 |
| **4900** | 0,6209 | 0,6235 | 0,6261 | 0,6286 | 0,6312 | **16000** | 0,9737 | 0,9745 | 0,9753 | 0,9761 | 0,9769 |
| **5000** | 0,6337 | 0,6362 | 0,6387 | 0,6412 | 0,6436 | **17000** | 0,9776 | 0,9783 | 0,9789 | 0,9796 | 0,9802 |
| **5100** | 0,6461 | 0,6485 | 0,6509 | 0,6532 | 0,6556 | **18000** | 0,9807 | 0,9813 | 0,9818 | 0,9824 | 0,9829 |
| **5200** | 0,6579 | 0,6603 | 0,6625 | 0,6648 | 0,6671 | **19000** | 0,9833 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9847 | 0,9851 |
| **5300** | 0,6693 | 0,6716 | 0,6738 | 0,6760 | 0,6782 | **20000** | 0,9855 | 0,9888 | 0,9912 | 0,9929 | 0,9942 |
| **5400** | 0,6803 | 0,6825 | 0,6845 | 0,6867 | 0,6888 | **30000** | 0,9952 | 0,9960 | 0,9966 | 0,9971 | 0,9975 |
| **5500** | 0,6909 | 0,6929 | 0,6950 | 0,6970 | 0,6990 | **40000** | 0,9978 | 0,9981 | 0,9983 | 0,9985 | 0,9987 |
| **5600** | 0,7010 | 0,7030 | 0,7049 | 0,7069 | 0,7088 | **50000** | 0,9988 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9992 |
| **5700** | 0,7107 | 0,7126 | 0,7145 | 0,7164 | 0,7183 | **60000** | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 |
| **5800** | 0,7201 | 0,7219 | 0,7238 | 0,7256 | 0,7273 | **70000** | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 |
| **5900** | 0,7291 | 0,7309 | 0,7326 | 0,7343 | 0,7361 | **80000** | 0,9996 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 |
| **6000** | 0,7378 | 0,7395 | 0,7411 | 0,7428 | 0,7444 | **90000** | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 | 0,9998 |
| **6100** | 0,7461 | 0,7477 | 0,7493 | 0,7509 | 0,7525 | **100000** | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |

***(*) pour les valeurs de $\lambda T$ comprises entre 10000 et 20000. (+) pour les valeurs de $\lambda T$ supérieures à 20000.***

# *Chapitre 3: Conduction thermique*

### *1. Introduction:*

On rappelle que la conduction est le mode de transfert de chaleur existant dans un milieu matériel donné sans qu'il y ait déplacement macroscopique de matière. C'est ce qui se passe, en particulier, dans les milieux solides homogènes opaques (parois en béton, parois métalliques…), transparents ou semi-transparents (parois vitrées comme, par exemple, les fenêtres…). La conduction a lieu également dans les fluides immobiles, c'est le cas, par exemple, de couche d'air immobile confinée entre deux couches de matériaux de construction.

La conduction ne peut se produire que s'il existe un écart de température (*déséquilibre thermique*), c'est-à-dire que si le gradient de température n'est pas nul. Dans le cas contraire, le milieu est en ***équilibre thermique*** et aucun transfert de chaleur ne peut avoir lieu. Pour que ce gradient de température existe, il faut une action externe au système (sources thermiques externes) pour pouvoir maintenir des conditions de température ou de flux sur les frontières du système: conditions aux limites thermiques.

Afin de simplifier la résolution des problèmes de transfert de chaleur par conduction, l'étude sera faite en ***régime permanent***, pour lequel la température en tout point du milieu est indépendante du temps, le gradient de température (déséquilibre thermique) est entretenu par les sources thermiques extérieures.

### *2. Equation générale de la conduction:*

Pour un solide ***homogène isotrope*** dont les propriétés caractéristiques: $\lambda$, $C_P$ et $\rho$ sont constantes et pour lequel $p$ est indépendante de la température, l'équation régissant le transfert de chaleur par conduction est donnée par (démonstration voir ***annexe 1***):

$$\Delta T(M,t) + \frac{p(M,t)}{\lambda} = \frac{1}{a} \times \frac{\partial T}{\partial t}(M,t) \qquad (1)$$

Où :

- $p$ est la puissance thermique produite (ou consommée), par unité de volume du milieu, par la source (ou le puits) de chaleur interne. Dans le cas général, $p$ est fonction de la position du point ***M***, de la température et du temps: $p(M,T,t)$. ***p>0 → source***; ***p<0 →puits***.

On peut citer, comme exemples, chaleur produite (ou consommée) lors d'une réaction chimique, chaleur produite par ***effet Joule*** par les résistances électriques contenues dans un four électrique ou un radiateur électrique...

- $a = \frac{\lambda}{\rho \times c_p}$ est la diffusivité thermique du matériau. Elle caractérise la vitesse à laquelle la chaleur se propage par conduction dans un matériau. Plus cette diffusivité est grande, plus le matériau s'échauffe ou se refroidit rapidement.

On rappelle que $\lambda$ est la conductivité thermique du matériau qui traduit son aptitude à conduire la chaleur.
La valeur de $\lambda$ permet de quantifier le pouvoir isolant de chaque matériau. Plus elle est faible, plus le matériau sera isolant, plus elle est élevée, plus le matériau sera conducteur.

Le produit de la masse volumique $\rho$ du matériau par sa chaleur massique ou spécifique $c_p$ représente la capacité thermique de ce matériau. Elle exprime sa capacité à absorber et à stocker de la chaleur en son sein.

Dans le tableau ***1***, placé en fin de ce chapitre, on donne les valeurs de $\lambda$, $\rho$ et $c_p$ de quelques corps usuels.

➢ ***Formes particulières de l'équation de la conduction***

On rencontre très fréquemment les formes particulières suivantes de l'équation de la conduction:

- milieu avec sources (puits) internes de chaleur, ***en régime permanent***:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \qquad (2) \qquad \textit{Equation de Poisson}$$

- milieu sans sources ni puits internes de chaleur, ***en régime permanent***:

$$\Delta T = 0 \qquad (3) \qquad \textit{Equation de Laplace}$$

- milieu sans sources ni puits internes de chaleur, ***en régime variable***:

$$\Delta T = \frac{1}{a} \times \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (4) \qquad \textit{Equation de Fourier}$$

Comme on s'intéresse, dans ce cours, uniquement au ***transfert de chaleur*** ***permanent et unidirectionnel dans un milieu homogène et isotrope***, les équations à retenir sont celles de ***Laplace*** et de ***Poisson***:

- Equation de ***Laplace***:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (5) \qquad (\textit{Géométries planes})$$

$$\frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial r}\left(r \times \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \qquad (6) \qquad (\textit{Géométries cylindriques})$$

$$\frac{1}{r^2} \times \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \times \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \qquad (7) \qquad (\textit{Géométries sphériques})$$

- Equation de ***Poisson:***

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p}{\lambda} = 0 \qquad (8) \qquad (\textit{Géométries planes})$$

$$\frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial r}\left(r \times \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{p}{\lambda} = 0 \qquad (9) \qquad (\textit{Géométries cylindriques})$$

$$\frac{1}{r^2} \times \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \times \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{p}{\lambda} = 0 \qquad (10) \qquad (\textit{Géométries sphériques})$$

### *3. Condition initiale et conditions aux limites:*

Pour résoudre l'équation de la conduction, il faut lui associer des conditions spécifiques à chaque problème:

- la condition initiale qui donne la distribution de température dans tout le milieu considéré, à l'instant initial, ***t=0***; elle utilisée dans le cas de transfert de chaleur en ***régime variable*** ;

- les conditions aux limites qui précisent comment la chaleur peut traverser les frontières du milieu.

Généralement, on distingue trois types de conditions aux limites thermiques.

#### *3.1. Condition de Direchlet ou de 1ère espèce:*

On se donne en chaque point de la surface frontière (***Σ***) du corps, la valeur de la température (température imposée):

$$T(M) = C^{ste} \qquad \forall\ M \in (\Sigma) \qquad (11)$$

(***Σ***) est donc une surface ***isotherme***.

***Exemple:*** Cas d'un corps en contact avec un thermostat.

#### *3.2. Condition de Neumann ou de 2ème espèce:*

La densité de flux de chaleur, c'est-à-dire la dérivée normale de la température $\frac{\partial T}{\partial n}(M)$ est connue en tout point ***M*** de la surface frontière ***(Σ)***:

$$-\lambda \times \frac{\partial T}{\partial n}(M) = f(M) \quad \forall\ M \in (\Sigma) \quad (12)$$

***Exemple:*** Corps ayant une surface adiabatique.

### *3.3. Condition de Fourier ou de 3ème espèce (condition mixte):*

La densité de flux de chaleur sur la surface frontière $(\Sigma)$ est contrôlée par un coefficient d'échange thermique $\boldsymbol{h}$ connu et par la température $\boldsymbol{T_\infty}$ du fluide environnant loin de la surface frontière du système:

$$-\lambda \times \frac{\partial T}{\partial n}(M) = h \times (T(M) - T_\infty) \quad \forall\ M \in (\Sigma) \quad (13)$$

qui s'écrit encore:

$$T(M) + \frac{\lambda}{h} \times \frac{\partial T}{\partial n}(M) = T_\infty = C^{ste} \quad \forall\ M \in (\Sigma)$$

C'est-à-dire, la combinaison linéaire de la température et de sa dérivée normale est connue sur la surface frontière du corps.

***Exemple:*** Cas d'une paroi solide en contact avec un fluide.

### *3.4. Contact thermique:*

D'autres conditions aux limites peuvent être écrites pour décrire le passage de la chaleur d'un corps à un autre, de nature différente, à travers leurs surfaces frontières mises en contact direct. Même si les surfaces sont considérées comme lisses la chaleur ne transite pas nécessairement avec facilité d'un corps à l'autre et on est amené à parler de ***contacts thermiques parfaits ou imparfaits***.

Soient deux corps de conductivités thermiques respectives $\lambda_1$ et $\lambda_2$, et $\boldsymbol{M}$ un point appartenant à leur ***surface frontière commune (S)***. Pour chacun des corps, les flux de chaleur, au point $\boldsymbol{M}$, s'écrivent:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\lambda_1 \times \dfrac{\partial T_1}{\partial n_1} \\ \varphi_2 = -\lambda_2 \times \dfrac{\partial T_2}{\partial n_2} \end{cases}$$

On exprime généralement la continuité du flux thermique au contact des surfaces: ***conservation du flux de chaleur***. En ce qui concerne la température, il existe une discontinuité, un saut, lorsque le contact n'est pas parfait.

#### *3.4.1. Contact thermique parfait:*

$$\begin{cases} -\lambda_1 \times \dfrac{\partial T_1}{\partial n_1}(M) = -\lambda_2 \times \dfrac{\partial T_2}{\partial n_2}(M) \\ T_1(M) = T_2(M) \end{cases} \quad M \in (S) \quad (14)$$

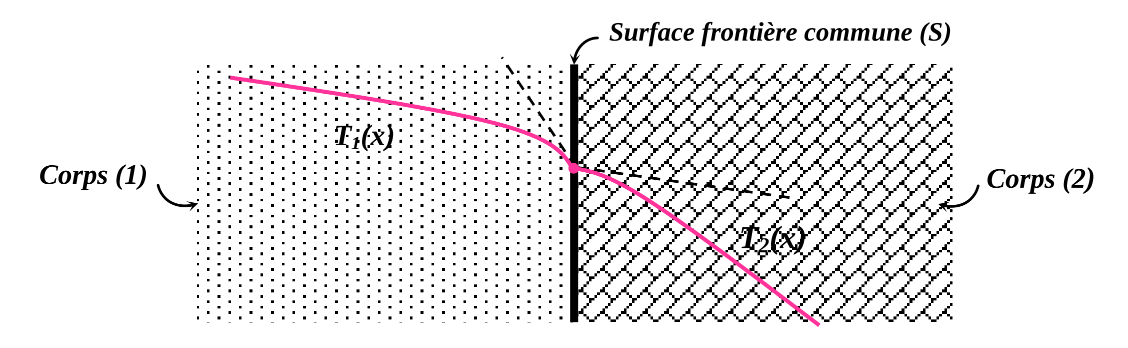



***Figure 1: Contact thermique parfait***

### *3.4.2. Contact thermique imparfait:*

La liaison thermique à l'interface s'exprime:

- par l'égalité des densités de flux thermique de part et d'autre de l'interface:

$$\varphi(M) = -\lambda_1 \times \frac{\partial T_1}{\partial n_1}(M) = -\lambda_2 \times \frac{\partial T_2}{\partial n_2}(M) \quad M \in (S) \quad (15-a)$$

- par la proportionnalité du saut de température $\Delta T = T_1 - T_2$ au flux thermique:

$$T_1(M) - T_2(M) = r \times \varphi(M) \quad M \in (S) \quad (15-b)$$

Le coefficient de proportionnalité ***r*** représente ***la résistance thermique de contact*** qui sera précisée dans la suite de ce chapitre. Elle s'exprime en $m^2.°C/W$ (ou en $m^2.°C.\ h/Kcal$) et dépend de la rugosité des surfaces, de leurs propriétés mécaniques, de la pression de serrage et de la présence de gaz interstitiel.

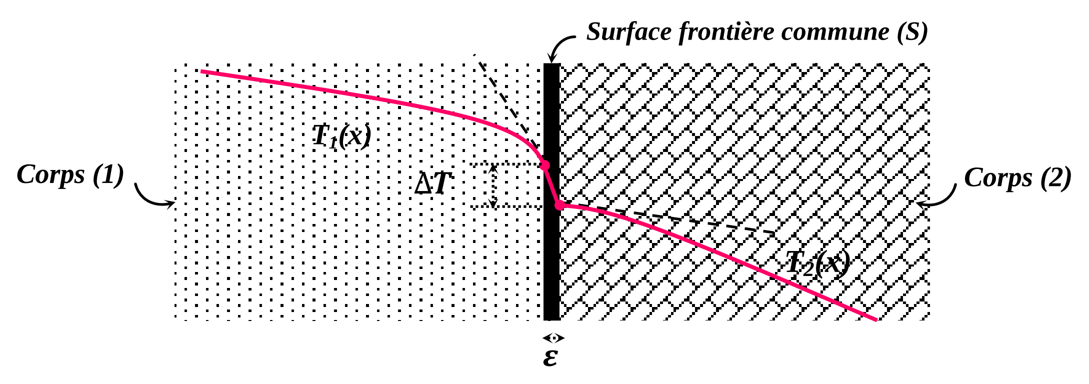



***Figure 2: Contact thermique imparfait***

### *4. Analogie électrique, notion de résistance thermique:*

En régime permanent, le flux de chaleur traversant un mur, sans sources internes de chaleur, d'épaisseur ***e***, de conductivité $\lambda$, de grandes dimensions transversales (***L*** et ***l***) et dont les faces extrêmes sont maintenues à des températures uniformes et constantes $T_1$ et $T_2$. ($T_1>T_2$), est donné par la relation:

$$\Phi = \lambda \times S \times \frac{T_1 - T_2}{e} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda \times S}} \quad (16)$$

Où est ***S*** est l'aire de la surface traversée par la chaleur: $S=L\times l$.
***L*** et ***l*** sont choisies grandes devant ***e*** pour satisfaire à l'hypothèse du transfert unidirectionnel.

La deuxième forme de la relation ***(16)*** est analogue à la loi *d'**Ohm*** en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique à la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $\frac{e}{\lambda S}$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur simple d'épaisseur ***e***, de conductivité $\lambda$ et de surface ***S***.

$$R_{cd} = \frac{e}{\lambda \times S} \quad (17)$$

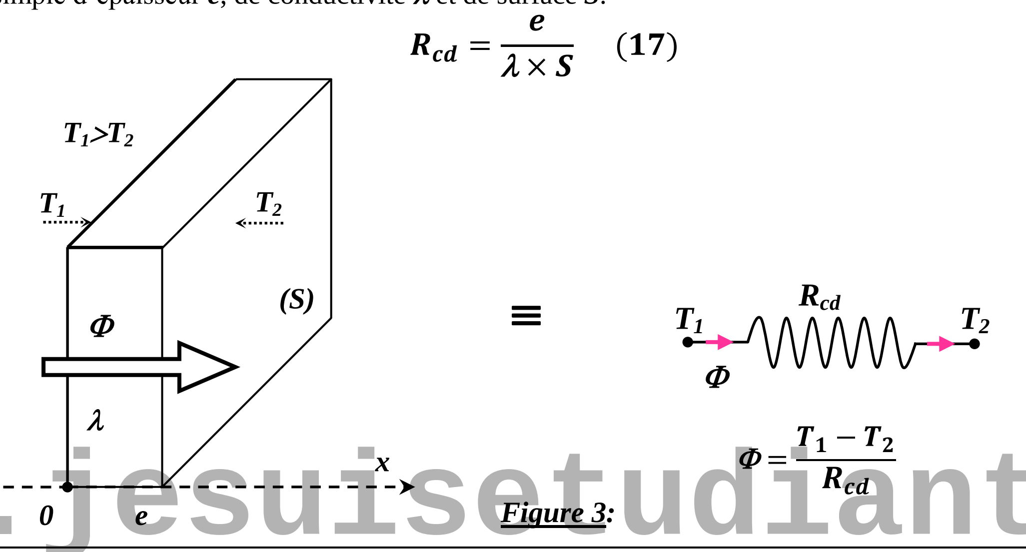



***Figure 3:***

$R_{cd}$ est ***la résistance au transfert de chaleur par conduction*** entre deux surfaces ***isothermes***. Elle s'exprime en ***°C/W*** ou en ***°C.h/Kcal*** et caractérise la difficulté pour réaliser un transfert de chaleur. Pour un même écart de température entre deux surfaces, la puissance thermique transférée sera d'autant plus importante que la résistance thermique $R_{cd}$ sera faible.

Si l'on multiplie $R_{cd}$ par $S$ on obtient la résistance thermique par unité de surface notée $r_{cd}$:

$$r_{cd} = \frac{e}{\lambda} \qquad (18)$$

Elle s'exprime en $m^2.°C/W$ ou en $m^2.°C.h/Kcal$.

Si l'une des parois du mur (par exemple celle portée à $T_1$) est en contact avec un fluide à la température $T_\infty$, le flux thermique échangé par convection s'écrit:

$$\Phi_{cv} = h_c \times S \times (T_1 - T_\infty) = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{1}{h_c \times S}} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{cv}} \qquad (19)$$

Donc :

$$R_{cv} = \frac{1}{h_c \times S} \qquad (20)$$

$R_{cv}$ est ***la résistance thermique relative à l'échange de chaleur par convection*** entre la paroi du mur et le fluide environnant.

Si la paroi et le fluide échange de la chaleur par ***rayonnement***, le flux radiatif net échangé entre eux s'écrit:

$$\Phi_{net:paroi \to fluide} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_1^4 - T_\infty^4\right) \qquad (21)$$

Cette expression peut être linéarisée en fonction de $T_1$-$T_\infty$ dans le cas de faibles écarts de température $\left(\left|T_1 - T_\infty\right| \leq 100°C\right)$:

$$\Phi_{r,net:paroi \to fluide} = h_r \times S \times (T_1 - T_\infty) \qquad (22)$$

avec:

$$h_r = 4\mathcal{F}_{12}\,\sigma \times \left(\frac{T_1 + T_\infty}{2}\right)^3 \qquad (23\text{-a})$$

Par analogie avec la convection, le paramètre $h_r$ ainsi défini est appelé coefficient d'échange thermique par ***rayonnement***.

Dans le cas contraire $\left(\left|T_1 - T_\infty\right| > 100°C\right)$, le coefficient $h_r$ se calcule en utilisant la relation suivante:

$$h_r = \frac{\mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_1^4 - T_\infty^4\right)}{\left(T_1 - T_\infty\right)} = \mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_1^2 + T_\infty^2\right) \times \left(T_1 + T_\infty\right) \qquad (23\text{-b})$$

La relation ***(22)*** peut être écrite comme suit:

$$\Phi_{r,net:paroi \to fluide} = h_r \times S \times (T_1 - T_\infty) = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{1}{h_r \times S}} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_r} \qquad (24)$$

Donc :

$$R_r = \frac{1}{h_r \times S} \qquad (25)$$

$R_r$ ***est la résistance thermique relative à l'échange de chaleur par rayonnement*** entre la paroi du mur et le fluide environnant.

Pour déterminer une résistance thermique totale, comme en électricité, on sait que:

- en série, deux ou plusieurs résistances s'ajoutent,

- en parallèle, les inverses des résistances thermiques s'ajoutent.

**Figure 4:**

$$R_{th,eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (26)$$

**Figure 5:**

$$\frac{1}{R_{th,eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad (27)$$

### 5. Applications:

On se place en ***régime permanent*** et on suppose que les ***milieux conductifs sont dépourvus de sources (ou de puits) internes*** et que la chaleur s'y propage suivant ***une seule direction***.

#### 5.1. Mur simple, mur composite:

##### 5.1.1. Mur simple:

Soit un mur simple d'épaisseur $e$ de conductivité $\lambda$ et dont les deux faces planes sont portées aux températures $T_1$ et $T_2$ ($T_1 > T_2$). On se propose de déterminer la distribution de température dans ce mur ainsi que le flux thermique le traversant.

On affaire à un mur simple à surfaces frontières isothermes, c'est-à-dire soumises à des conditions aux limites de ***Direchlet*** ou de ***1ère espèce***. Le système fondamental donnant la distribution de température à l'intérieur du mur s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \\ T(x=0) = T_1 \\ T(x=e) = T_2 \end{cases} \qquad (28)$$

En intégrant ce système, on obtient:

$$T(x) = -\frac{T_1 - T_2}{e} \times x + T_1 \qquad pour \quad 0 \leq x \leq e \qquad (29)$$

C'est la distribution de température à l'intérieur du mur.

La densité de flux thermique traversant ce mur s'écrit, d'après la loi de ***Fourier***:

$$\varphi(x) = -\lambda \times \frac{dT}{dx} = \lambda \times \frac{T_1 - T_2}{e} \qquad (30)$$

Le flux thermique traversant une surface d'aire $S$ du mur s'écrit:

$$\Phi = S \times \varphi(x) = \lambda \times \frac{T_1 - T_2}{e} \qquad (31)$$

Soit, en introduisant la résistance thermique de conduction:

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{cd}} \qquad (32)$$

Avec :

$$R_{cd} = \frac{e}{\lambda \times S}$$

***5.1.2. Mur composite formé de murs plans homogènes, en série:***

Il est facile de généraliser les résultats obtenus pour un mur simple à un mur composite constitué de plusieurs couches de matériaux accolées d'épaisseur $e_i$ et de conductivité $\lambda_i$ en ***contact thermique parfait***.
Si les surfaces extrêmes sont maintenues aux températures constantes $T_1$ et $T_{n+1}$, le flux de chaleur traversant le mur composite est donné par:

$$\Phi = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n} R_{cdi}} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R_{cd,eq}} \qquad (33)$$

Si les surfaces extrêmes sont en contact avec deux fluides de températures $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$ (***figure 6***), le flux de chaleur traversant le mur composite est donné par:

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{cv1} + \sum_{i=1}^{n} R_{cdi} + R_{cv2}} \qquad (34)$$

avec:

$R_{cdi} = \frac{e_i}{\lambda_i \times S}$ : résistance thermique de ***conduction*** du matériau $i$ $(e_i, \lambda_i)$ ;

$R_{cv1} = \frac{1}{h_1 \times S}$ : résistance thermique de ***convection*** du côté du fluide ***(1)***;

$R_{cv2} = \frac{1}{h_2 \times S}$ : résistance thermique de ***convection*** du côté du fluide ***(2)***.

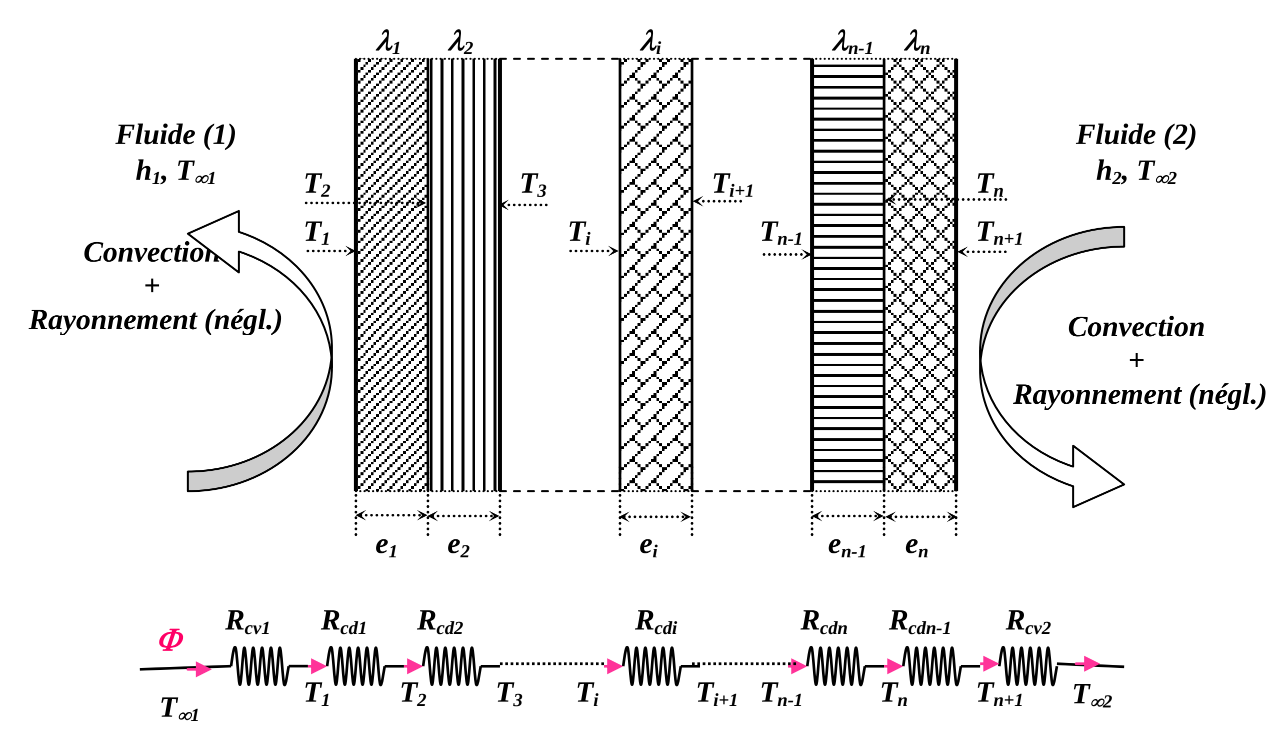



***Figure 6: Schéma descriptif et circuit thermique d'un mur composite***

### 5.1.3. Mur composite constitué de plusieurs murs plans homogènes, en parallèle:

Supposons maintenant que différents éléments solides soient juxtaposés par bandes et que la température soit uniforme sur chacune de leurs faces (***figure 7***). L'écart de température $T_1$-$T_2$ est donc le même pour chacun des éléments traversé respectivement par les flux thermiques $\Phi_1$,… $\Phi_i$,… et $\Phi_n$.

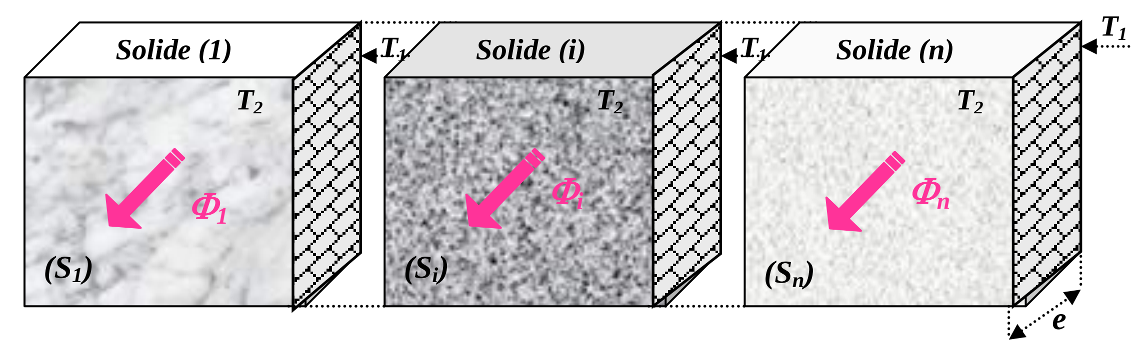



***Figure 7: Conduction à travers plusieurs murs plans en parallèle.***

Si $R_1$, $R_2$,…, $R_i$,… et $R_n$ représentent les résistances thermiques de conduction de chacun des murs simples, alors les flux les traversant respectivement $\Phi_1$, $\Phi_2$,… $\Phi_i$,… et $\Phi_n$ sont donnés par:

$$\Phi_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_1}; \quad \Phi_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_2};\ldots\Phi_i = \frac{T_1 - T_2}{R_i}\ldots \text{ et } \Phi_n = \frac{T_1 - T_2}{R_n}$$

Le flux thermique total traversant le mur composite:

$$\Phi_{tot} = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i = (T_1 - T_2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i} = \frac{T_1 - T_2}{R_{theq}} \qquad (35)$$

La résistance thermique équivalente s'écrit:

$$R_{theq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i S_i}{e}\right)} = \frac{e}{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i S_i)}$$

D'où : $$R_{theq} = \frac{e}{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i S_i)} \qquad (36)$$

***Remarque:***

Si les différents murs simples en parallèle n'ont pas la même épaisseur, le raisonnement précédent s'applique à condition de négliger les échanges thermiques par les faces latérales des murs juxtaposés.

### 5.2. Conduite cylindrique, paroi cylindrique composite:

#### 5.2.1. Conduite cylindrique:

Soit une conduite cylindrique de très grande longueur $L$ par rapport aux rayons intérieur $r_1$ et extérieur $r_2$, et dont les faces interne et externe sont soumises à des températures uniformes et constantes $T_1$ et $T_2$ ($T_1$>$T_2$). Le matériau constituant la conduite est de conductivité thermique $\lambda$.

Les isothermes sont des surfaces cylindriques coaxiales, le gradient de température est ***radial*** (la température n'est fonction que de $r$). Le système fondamental s'écrit donc:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial r}\left(r \times \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \\ T(r = r_1) = T_1 \\ T(r = r_2) = T_2 \end{cases} \qquad (37)$$

et dont la résolution aboutit à l'expression suivante de $T(r)$:

$$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \times Ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad pour\ r_1 \leq r \leq r_2 \qquad (38)$$

On déduit de la loi de ***Fourier*** la densité de flux, $\varphi$:

$$\varphi(r) = \lambda \times \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \times \frac{1}{r} \qquad (39)$$

Le flux thermique traversant chaque surface cylindrique de rayon $r$ et de longueur $L$ est:

$$\Phi = S(r) \times \varphi(r) = (2.\pi.r.L) \times \varphi(r)$$

D'où:

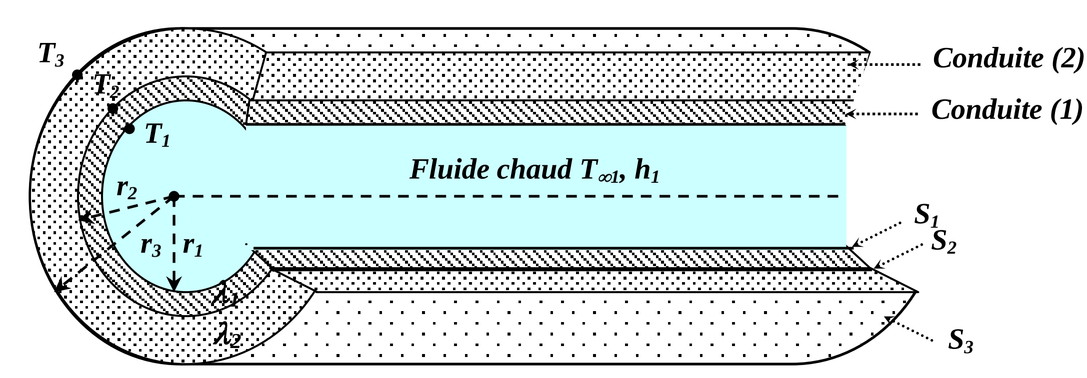
$$\Phi = 2.\pi.L.\lambda \times \frac{T_1 - T_2}{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad (40)$$

Enfin, on déduit l'expression de ***la résistance thermique de conduction d'une conduite cylindrique***:

$$R_{cd} = \frac{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \times \pi \times L \times \lambda} \qquad (41)$$

***5.2.2. Paroi cylindrique composite (conduites cylindriques coaxiales accolées):***

Le flux thermique traversant la paroi des conduites cylindriques coaxiales accolées de conductivités thermiques différentes se rencontre dans de nombreuses installations industrielles. Un tuyau isolé transportant un fluide chaud et exposé à une ambiance froide est l'un des problèmes types (***figure 8***). Si le tuyau est relativement long, la direction de la chaleur s'écoulant à travers sa paroi serait radiale. On supposera un ***contact thermique parfait*** entre les conduites.




***Fluide froid $T_{\infty 2}$, $h_2$***

***<u>Figure 8</u>: conduites cylindriques accolées***

La conduite ***(1)=($\lambda_1$,$r_1$, $r_2$)*** constitue une première résistance au transfert thermique $R_{cd1}$:

$$R_{cd1} = \frac{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \times \pi \times L \times \lambda_1}$$

La conduite ***(2)=($\lambda_2$,$r_2$, $r_3$)*** constitue une deuxième résistance au transfert thermique $R_{cd2}$:

$$R_{cd2} = \frac{Ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2 \times \pi \times L \times \lambda_2}$$

La résistance thermique de conduction équivalente est:

$$R_{cd,eq} = R_{cd1} + R_{cd2}$$

D'où:

$$R_{cd,eq} = \frac{1}{2 \times \pi \times L} \times \left[ \frac{Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda_1} + \frac{Ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\lambda_2} \right] \qquad (42)$$

Le flux thermique traversant la paroi cylindrique composite est:

$$\Phi = \frac{T_1 - T_3}{R_{cd,eq}} \qquad (43)$$

Si $T_1$ et $T_3$ sont connues.
ou bien:

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{cv1} + R_{cd,eq} + R_{cv2}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{th,eq}} \qquad (44)$$

Si $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$ sont connues.
avec:

$$R_{cv1} = \frac{1}{h_1 \times S_1} = \frac{1}{h_1 \times (2.\pi.r_1.L)}$$

$R_{cv1} = \frac{1}{h_1 \times S_1} = \frac{1}{h_1 \times (2.\pi.r_1.L)}$: résistance thermique de convection entre le fluide chaud et la paroi interne de la conduite ***(1)***;
$R_{cv2} = \frac{1}{h_2 \times S_3} = \frac{1}{h_2 \times (2.\pi.r_3.L)}$: résistance thermique de convection entre la paroi externe de la conduite ***(2)*** et le fluide froid.

Ce résultat peut être généralisé pour une paroi cylindrique composite constituée de ***n*** conduites coaxiales:

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{th,eq}}$$

avec:

$$R_{th,eq} = R_{cv1} + R_{cd,eq} + R_{cv2} = R_{cv1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{Ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{2 \times \pi \times L \times \lambda_i} + R_{cv2} \qquad (45)$$

***5.3. Sphère creuse, paroi sphérique composite***:

***5.3.1. Sphère creuse:***

Considérons une sphère creuse de rayons intérieur $r_1$ et extérieur $r_2$, et dont les surfaces frontières sont soumises à des températures uniformes et constantes $T_1$ et $T_2$. Les isothermes sont des surfaces sphériques concentriques. Le transfert thermique est donc ***radial***. Le système fondamental s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \times \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \\ T(r = r_1) = T_1 \\ T(r = r_2) = T_2 \end{cases} \qquad (46)$$

L'intégration de ce système conduit à la solution suivante:

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \times \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \qquad (r_1 \le r \le r_2) \qquad (47)$$

On déduit de la loi de ***Fourier*** la densité de flux:

$$\varphi(r) = \lambda \times \left[ \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \right] \times \frac{1}{r^2} \qquad (48)$$

et ensuite le flux thermique $\boldsymbol{\Phi}$ traversant chaque surface sphérique de rayon ***r***:

$$\boldsymbol{\Phi = S(r) \times \varphi(r) = (4.\pi.r^2) \times \varphi(r)}$$

D'où:

$$\boldsymbol{\Phi = 4.\pi.\lambda \times \left[\frac{T_1 - T_2}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}}\right]} \qquad (\mathbf{49})$$

Enfin, on déduit l'expression de la résistance thermique de conduction d'une sphère creuse:

$$\boldsymbol{R_{cd} = \frac{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}}{4.\pi.\lambda} = \frac{r_2 - r_1}{4.\pi.\lambda.r_1.r_2}} \qquad (\mathbf{50})$$

#### *5.3.2. Paroi sphérique composite (sphères concentriques accolées):*

Le flux thermique traversant la paroi de deux sphères concentriques accolées (***figure 8***) $\mathcal{S}_1$ ***($r_1$,$r_2$,$\lambda_1$)*** et $\mathcal{S}_2$ ***($r_2$,$r_3$,$\lambda_2$)*** est donné par:

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{T_1 - T_3}{R_{cd,eq}}} \qquad (\mathbf{49})$$

Si $\boldsymbol{T_1}$ et $\boldsymbol{T_3}$ sont connues.
ou bien:

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{cv1} + R_{cd,eq} + R_{cv2}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{th,eq}}} \qquad (\mathbf{51})$$

Si $\boldsymbol{T_{\infty 1}}$ et $\boldsymbol{T_{\infty 2}}$ sont connues.
où:

$\boldsymbol{R_{cd,eq} = R_{cd1} + R_{cd2} = \frac{1}{4\pi} \times \left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda_1 r_1 r_2} + \frac{r_3 - r_2}{\lambda_2 r_2 r_3}\right)}$ est la résistance thermique de conduction de la paroi composite;

$\boldsymbol{R_{cv1} = \frac{1}{h_1 S_1} = \frac{1}{h_1 \times (4\pi r_1^2)}}$ est la résistance thermique de convection entre la paroi interne de la sphère $\mathcal{S}_1$ et un fluide environnant;

$\boldsymbol{R_{cv2} = \frac{1}{h_2 S_3} = \frac{1}{h_2 \times (2\pi r_3^2)}}$ est la résistance thermique de convection entre la paroi externe de la sphère $\mathcal{S}_2$ et un fluide environnant.

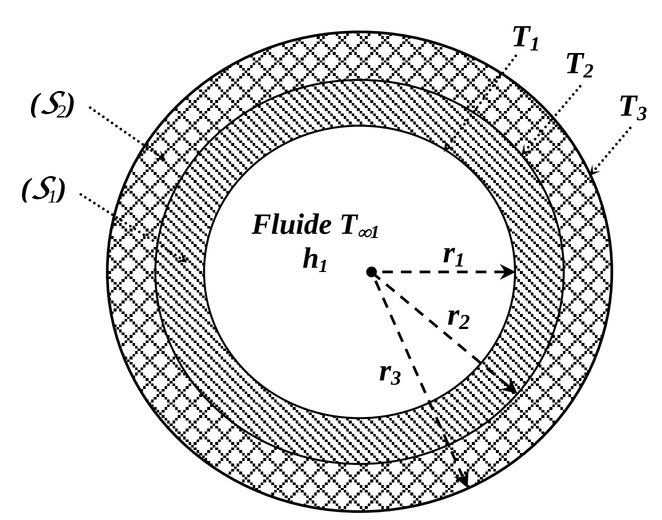



***Figure 9: Sphères concentriques accolées.***

### *5.4. Epaisseur critique d'un revêtement isolant:*

Si dans le cas d'une paroi plane la moindre épaisseur d'isolant entraîne une réduction des transferts thermiques, il n'en est pas de même pour une conduite cylindrique ou une paroi sphérique. En fait, l'addition d'une couche isolante à la surface extérieure d'une conduite ne réduit pas toujours les pertes thermiques vers le milieu ambiant mais contribue parfois à l'augmentation de ces pertes, jusqu'à atteindre un maximum de pertes pour une épaisseur donnée appelée ***épaisseur critique d'isolation***.

#### *5.4.1. Cas d'une conduite cylindrique:*

On se propose d'isoler une conduite cylindrique, de conductivité thermique $\lambda$, de diamètres interne $D_1$ et externe $D_2$ et de longueur $L$ ($L>>D_1$ et $D_2$), par un manchon isolant d'épaisseur $x$ et de conductivité $\lambda_i$. On suppose que la surface interne de la conduite est en contact avec un fluide chaud à la température $T_{\infty 1}$, coefficient d'échange thermique $h_1$, et que la surface externe du manchon est en contact avec un fluide froid à la température $T_{\infty 2}$, coefficient d'échange thermique $h_2$. Quelle est l'influence de l'épaisseur du manchon isolant sur les pertes thermiques?

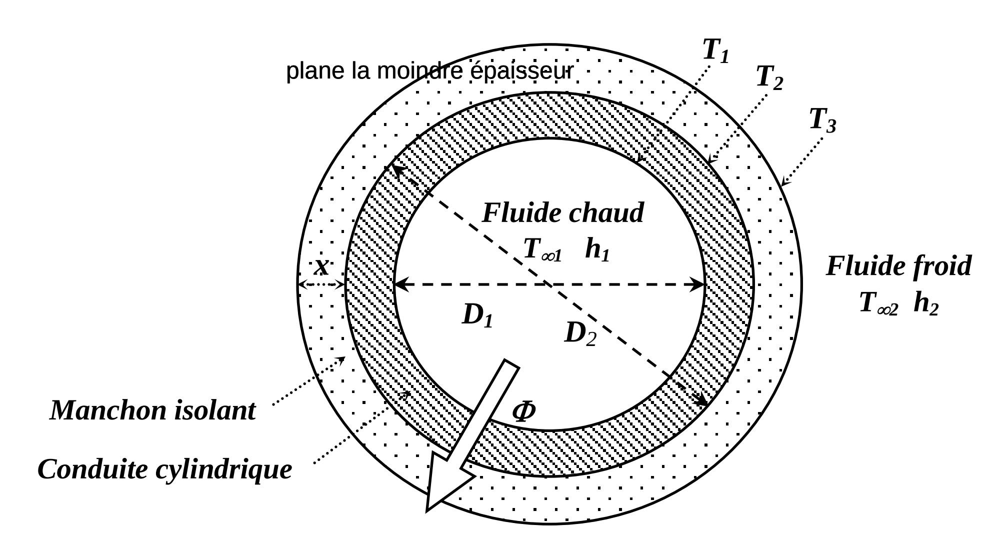



***Figure 10: Conduite cylindrique isolée.***

- Les pertes thermiques à travers la paroi de la conduite nue sont données par:

$$\Phi_0 = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2}}$$

$$\Rightarrow \Phi_0 = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{\pi D_1 L h_1} + \frac{1}{2\pi\lambda L} Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right) + \frac{1}{\pi D_2 L h_2}} \quad (53)$$

- Les pertes thermiques à travers la paroi de la conduite isolée sont données par:

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{cv1} + R_{cd} + R_{cdi} + R_{cv2}}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{\pi D_1 L h_1} + \frac{1}{2\pi\lambda L} \times Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right) + \frac{1}{2\pi\lambda_i L} \times Ln\left(1 + 2.\frac{x}{D_2}\right) + \frac{1}{\pi(D_2 + 2x)L h_2}}$$

Ou encore:

$$\Phi(x) = \frac{2\pi L \times (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{2\pi L \times R_{th} + \frac{1}{\lambda_i} \times Ln\left(1 + 2.\frac{x}{D_2}\right) + \frac{2}{(D_2 + 2x)h_2}} \quad (54)$$

avec : $R_{th} = \frac{1}{\pi D_1 L h_1} + \frac{1}{2\pi\lambda L} \times Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)$

Calculons la dérivée de $\Phi$ par rapport à l'épaisseur $x$ du manchon:

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{2\pi L \times \left(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}\right)}{\left[2\pi L \times R_{th} + \frac{1}{\lambda_i} \times Ln\left(1 + 2.\frac{x}{D_2}\right) + \frac{2}{\left(D_2 + 2x\right)h_2}\right]^2} \times \frac{2}{\left(D_2 + 2x\right)^2 \lambda_i} \times \left(D_2 + 2x - 2.\frac{\lambda_i}{h_2}\right) \quad (55)$$

On voit que cette dérivée est susceptible d'être positive dans certaines conditions.

En effet, si $D_2 > 2\frac{\lambda_i}{h_2}$ la dérivée de $\Phi$ est toujours négative quel que soit $x$ et l'augmentation de l'épaisseur de l'isolant réduit les pertes thermiques.

Par contre, si $D_2 < 2\frac{\lambda_i}{h_2}$ il existe une valeur $x_c = \frac{\lambda_i}{h_2} - \frac{D_2}{2}$, épaisseur critique de l'isolant, pour laquelle les pertes thermiques sont maximales. Ceci est dû au fait que l'augmentation de la surface d'échange externe (diminution de la résistance de convection) provoquée par l'addition de la couche isolante l'emporte sur l'augmentation de la résistance de conduction. Lorsque $x$ varie de $0$ à $x_c$, les pertes augmentent de $\Phi_0 = \Phi(x=0)$ à $\Phi_{max} = \Phi(x=x_c)$, puis décroissent en passant par $\Phi_0$ obtenu pour une épaisseur $x_0$.*(figure 10)*. Pour réduire les pertes dans ce cas, il faudrait dépasser $x_0$ tel que:

$$\Phi_0 = \Phi\left(x_0\right) = \frac{2\pi L \times \left(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}\right)}{2\pi L \times R_{th} + \frac{1}{\lambda_i} \times Ln\left(1 + 2.\frac{x_0}{D_2}\right) + \frac{2}{\left(D_2 + 2x_0\right)h_2}}$$

Soit, en remplaçant $\Phi_0$ par son expression:

$$Ln\left(1 + 2\frac{x_0}{D_2}\right) = 2\frac{\lambda_i}{h_2} \times \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_2 + 2x_0}\right) \quad (56)$$

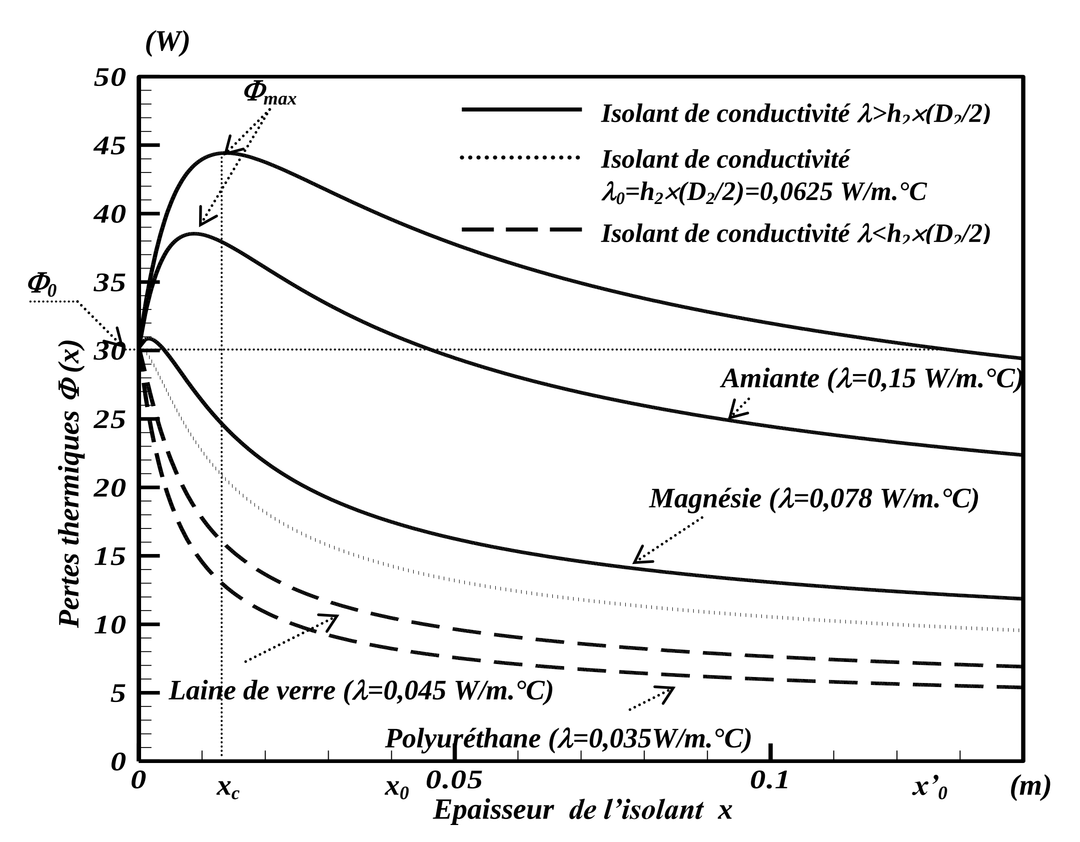



***Figure 11**: Variation des pertes thermiques traversant une conduite, de petit diamètre externe ($D_2$=12,5 mm), en fonction de l'épaisseur de l'isolant.*

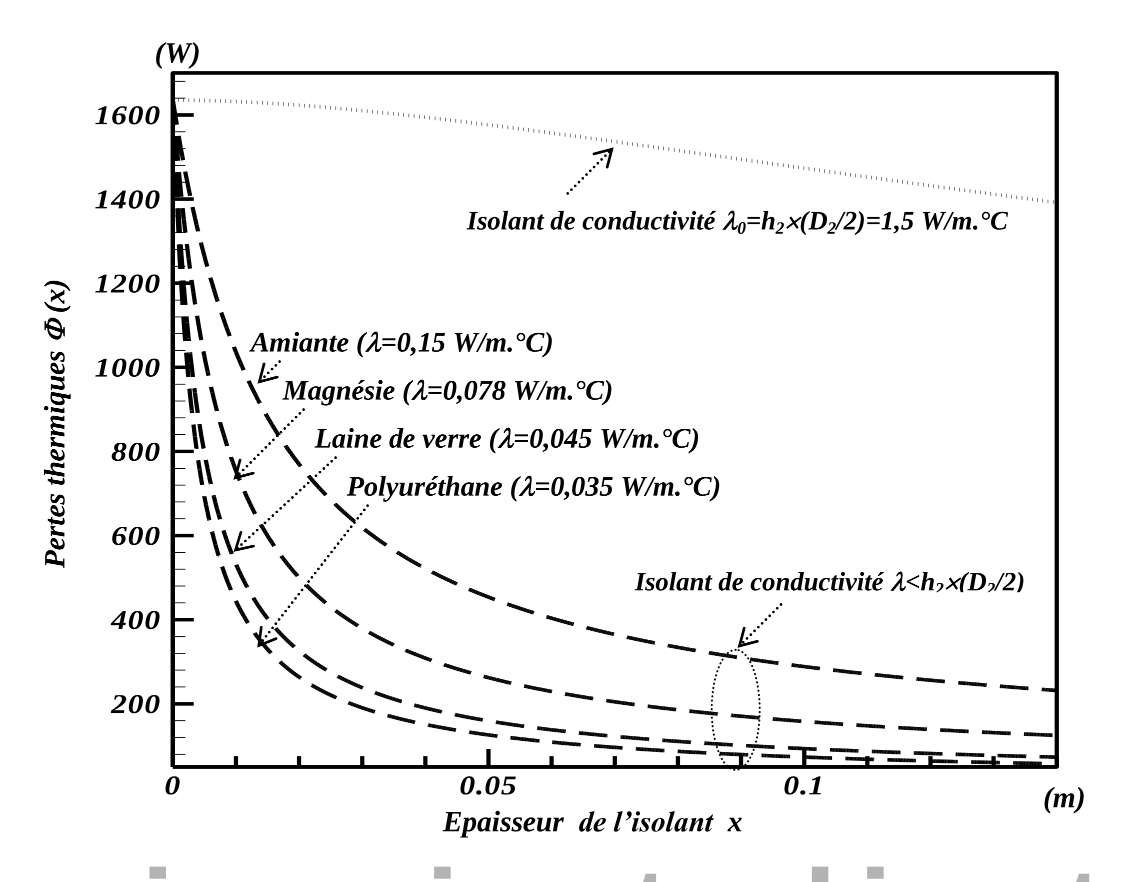



***Figure 12**: Variation des pertes thermiques traversant une conduite, de grand diamètre externe ($D_2$=30 cm), en fonction de l'épaisseur de l'isolant.*

### *5.4.2. Cas d'une paroi sphérique:*

Un raisonnement analogue conduit à $x_c = 2\frac{\lambda_i}{h_2} - \frac{D_2}{2}$, épaisseur critique de la couche sphérique isolante.

Par conséquent, pour réaliser une isolation thermique efficace il faut choisir un isolant de conductivité $\lambda_i$ telle que: $\lambda_i < \lambda_0$, avec $\lambda_0 = h_2 \times \frac{D_2}{4}$.

### *8. Ailettes, surfaces ailetées:*

Dans de nombreuses situations pratiques on est amené à augmenter le transfert de chaleur entre une surface donnée (plane, cylindrique ou sphérique) et un fluide environnant en fixant des ailettes sur cette surface.
Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut échanger une puissance thermique importante dans un encombrement réduit. Comme exemples, on peut citer le refroidissement des composants électroniques, les radiateurs d'automobile, les échangeurs industriels...
D'une manière générale, l'emploi des ailettes est avantageux pour les gaz qui sont caractérisés par un coefficient d'échange convectif $h$ faible, et moins utile pour les liquides pour lesquels $h$ est grand. Les ailettes minces, étroites et rapprochées sont meilleures, au point de vue transfert de chaleur, que les ailettes épaisses et espacées. Cependant, on est limité par les pertes de charge qui augmentent si l'on diminue trop l'espacement des ailettes. Une ailette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique est élevée.
Le choix d'une forme géométrique convenable d'une ailette exige un compromis entre le prix (raisonnable), l'encombrement (réduit), pertes de charge (faibles) et le transfert de chaleur (important).

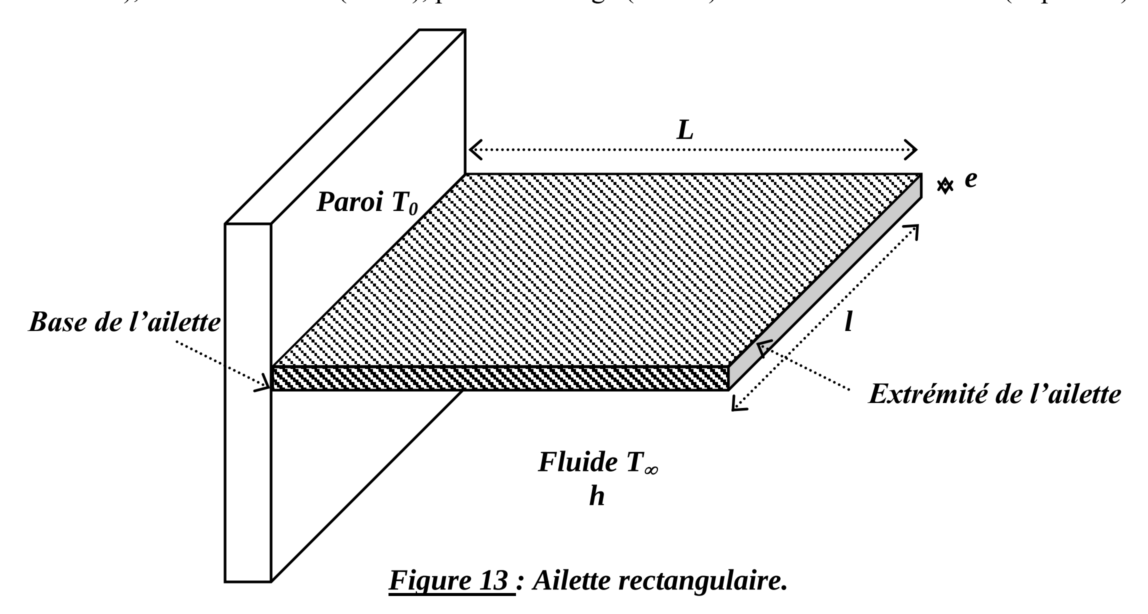



***Figure 13 : Ailette rectangulaire.***

### *6. Conduction en régime permanent avec sources internes de chaleur:*

Les systèmes avec sources (ou puits) de chaleur sont rencontrés dans de nombreuses applications techniques. Les exemples types sont les réacteurs chimiques et nucléaires, les chaudières, les radiateurs électriques...
Dans ce chapitre, on ne considèrera que quelques cas simples pour lesquels la production interne de la chaleur est uniforme (plaque plane, cylindre, sphère). L'équation générale de la conduction se réduit à celle de ***Poisson***:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0$$

#### *6.1. Plaque plane avec sources internes uniformes:*

Considérons une plaque plane et épaisse dont les surfaces frontières sont portées à des températures uniformes et constantes, et dans laquelle la chaleur est générée uniformément (***figure 13***). La longueur et la largeur de la plaque sont supposées grandes devant son épaisseur pour que le transfert de chaleur y soit unidirectionnel. En régime permanent, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{p}{\lambda}=0$$

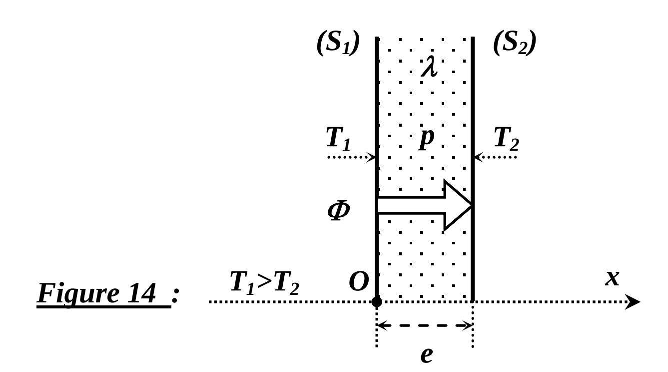


***Figure 14 :***

Après deux intégrations successives de cette équation on obtient la distribution de température à l'intérieur de la plaque:

$$T(x)=-\frac{p}{2\lambda}x^2+C_1x+C_2 \qquad (57)$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes d'intégration dont les valeurs sont déterminées par les conditions aux limites:

$$\begin{cases}T(x=0)=T_1\\T(x=e)=T_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_2=T_1\\C_1=\frac{T_2-T_1}{e}+\frac{p}{2\lambda}e\end{cases}$$

Substituant ces expressions de $C_1$ et $C_2$ dans la relation ***( ?)***, la distribution de température devient:

$$T(x)=\frac{p}{2\lambda}x(e-x)+\frac{T_2-T_1}{e}x+T_1 \qquad (0\leq x\leq e) \qquad (58)$$

La position du maximum de température est donnée par:

$$x_m=\frac{e}{2}+\frac{\lambda}{pe}(T_2-T_1) \qquad (59)$$

La température maximale en ce point est:

$$T_{max}=\frac{p}{8\lambda}e^2+\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{(T_1-T_2)^2}{2pe^2}\lambda \qquad (60)$$

Ainsi, la distribution des températures à l'intérieur de la plaque est une parabole dont le sommet se situe sur le plan $x=x_m$. La chaleur ne peut s'écouler à travers ce plan (surface adiabatique): $\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=x_m}=0\Rightarrow\varphi(x=x_m)=0$.

La densité de flux de chaleur est:

$$\varphi(x)=\lambda\frac{(T_1-T_2)}{e}+p\times\left(x-\frac{e}{2}\right) \qquad (61)$$

***6.2. Cylindre long avec sources internes uniformes:***

Un cylindre long (***L>>R***) avec génération interne et uniforme de chaleur peut être considéré comme une schématisation d'un problème réel tel qu'un élément cylindrique de combustible nucléaire.

Dans ce cas, la chaleur s'écoule suivant la direction radiale et l'équation de la conduction s'écrit:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{p}{\lambda}=0$$

dont l'intégration conduit à la solution suivante:

$$T(r) = -\frac{p}{4\lambda} r^2 + C_1 Ln(r) + C_2$$

où $C_1$ et $C_2$ seront déterminées à l'aide des conditions aux limites associées au problème.
Comme il s'agit d'un cylindre plein de rayon $R$ dont la surface latérale est soumise à une température uniforme et constante $T_0$., les conditions aux limites s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} \left.-\lambda \frac{dT}{dr}\right]_{r=0} = 0 & \text{pas d'échappement de chaleur au centre du cylindre} \\ T(r = R) = T_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = T_0 + \frac{p}{4\lambda} R^2 \end{cases}$$

Par conséquent, la distribution de température dans le cylindre est donnée par:

$$T(r) = -\frac{p}{4\lambda}\left(r^2 - R^2\right) + T_0 \qquad (0 \le r \le R) \qquad (62)$$

La température maximale est localisée sur l'axe du cylindre et égale à:

$$T_{max} = T(r_m = 0) = T_0 + \frac{pR^2}{4\lambda} \qquad (63)$$

***6.3. Sphère pleine avec sources internes uniformes:***

Soit une sphère pleine de rayon $R$, de conductivité $\lambda$, siège d'une production uniforme de chaleur $p$, plongée dans un fluide de température $T_\infty$ avec un coefficient d'échange thermique $h$. Le système présente une symétrie de révolution, le transfert thermique est donc radial. Le système fondamental, composé de l'équation de conduction et des conditions aux limites, s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) + \frac{p}{\lambda} = 0 \\ \left.-\lambda \frac{dT}{dr}\right]_{r=0} = 0 \quad (\text{pas d'échappement de chaleur au centre de la sphère}) \\ \left.-\lambda \frac{dT}{dr}\right]_{r=R} = h\left(T(r = R) - T_\infty\right) \quad \begin{pmatrix} \text{puissance produite à l'intérieur de la sphère} \\ \text{et libérée au fluide par deux mécanismes} \\ \text{agissant en parallèle : convection + rayonnement} \end{pmatrix} \end{cases}$$

L'intégration de ce système donne la solution suivante:

$$T(r) = T_\infty + \frac{pR^2}{6\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{p}{3h} R \qquad (0 \le r \le R) \qquad (64)$$

De la loi de ***Fourier*** on déduit le flux thermique:

$$\Phi(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 p = V(r) p$$

La température sur la surface de la sphère s'obtient en écrivant:

$$\Phi(R) = Vp = hS\left(T(R) - T_\infty\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 p = hS\left(T(R) - T_\infty\right) \qquad \left(S = 4\pi R^2\right)$$

$$\Rightarrow T(R) = \frac{Rp}{3h} + T_\infty \qquad (65)$$

# Tableau 1: Propriétés Thermophysiques de certains corps

| Corps | Point de fusion | Température | Densité | Chaleur spécifique | Conductivité thermique |
|---|---|---|---|---|---|
| Notation & Unité | $T_F$ (°C) | T (°C) | $\rho$ (Kg/m$^3$) | Cp (J/Kg.°C) | $\lambda$ (W/m.°C) |
| **Métaux, alliages et céramiques** | | | | | |
| Aluminium pur | 660 | 20 | 2700 | 900 | **204** |
| | | 400 | | | **249** |
| Alumine ($Al_2O_3$) | 2053 | | | | **29** |
| Argent pur | 961 | 20 | 10525 | 234 | **407** |
| Cuivre pur | 1083 | 20 | 8954 | 383 | **386** |
| | | 400 | | | **363** |
| Laiton (70% Cu, 30% Zn) | 845 | 20 | 8522 | 385 | **111** |
| | | 400 | | | **147** |
| Fer pur | 1536 | 20 | 7870 | 452 | **73** |
| Acier inox (15% Cr, 10% Ni) | | 20 | 7864 | 460 | **20** |
| Acier inox (18% Cr, 8% Ni) | | 20 | 7816 | 460 | **16,3** |
| Plomb | 328 | 20 | 11373 | 130 | **35** |
| Tungstène | 3422 | 20 | 19345 | 132 | **176** |
| Alumine ($Al_2O_3$) | 2053 | 20 | | | **29** |
| Magnésie | | 38 | 270 | | **0,067** |
| **Matériaux isolants** | | | | | |
| Laine de roche | | 20 | 55 | 880 | **0,038** |
| | | 20 | 135 | 880 | **0,041** |
| Laine de verre | | 20 | 10 | 880 | **0,045** |
| | | 20 | 40 | 880 | **0,035** |
| Laine minérale | | 20 | 15 | 839 | **0,04** |
| Liège expansé | | 20 | 120 | 2100 | **0,044** |
| | | 20 | 32 | 1300 | **0,03** |
| Polyuréthane (mousse dure) | | 20 | 50 | 1360 | **0,035** |
| | | 20 | 85 | 1300 | **0,045** |
| PVC (mousse rigide) | | 20 | 30 | 1300 | **0,031** |
| | | 20 | 40 | 1300 | **0,041** |
| Polystyrène expansé | | 20 | 28 | 1300 | **0,037** |

| Corps | Température | Densité | Chaleur spécifique | Conductivité thermique |
|---|---|---|---|---|
| Notation & Unité | T (°C) | $\rho$ (Kg/m$^3$) | Cp (J/Kg.°C) | $\lambda$ (W/m.°C) |
| **Liquides** | | | | |
| **Eau** | 20 | 1000 | 4176,6 | **0,6** |
| | 93 | 962 | 4185 | **0,675** |
| **Benzène** | 16 | 883 | 1674 | **0,16** |
| | 38 | 865 | 1841,4 | **0,15** |
| **Huile légère** | 25 | 910 | 1841,4 | **0,132** |
| | 93 | 865 | 2134 | **0,128** |
| **Glycérine** | 10 | 1270 | 2318,5 | **0,286** |
| | 38 | 1250 | 2511 | **0,283** |
| | -50 | 1547 | 875 | **0,0675** |
| **Fréon 12** | 0 | 1397 | 934,5 | **0,0727** |
| | 50 | 1216 | 1022 | **0,0675** |
| **Mercure** | -17,8 | 13707 | 141,5 | **9,76** |
| ($T_F$=-38,9°C et $T_E$=357°C) | 93 | 13409 | 136,5 | **10,38** |
| | 204 | 13168 | 135,6 | **12,63** |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Sodium** | 100 | 927 | 1384 | **85,7** |
| ($T_F$=97,6°C et $T_E$=882°C) | 500 | 833 | 1262 | **66,3** |
| **Potassium** | 100 | 824 | 813 | **48** |
| ($T_F$=63,2°C et $T_E$=757°C) | 500 | 721 | 762 | **37,5** |
| **NaK (56% K, 44% Na)** | 100 | 880 | 1064 | **22,8** |
| ($T_F$=5,7°C et $T_E$=812°C) | 500 | 881 | 982 | **27,1** |
| **Lithium** | 204 | 509 | 4365 | **46,37** |
| ($T_F$=179°C et $T_E$=1317°C) | 538 | 476 | 4171 | **30,45** |
| **Bismuth** | 315 | 10011 | 144 | **16,4** |
| ($T_F$=271°C et $T_E$=1477°C) | 538 | 9739 | 155 | **15,6** |
| **Plomb** | 371 | 10540 | 159 | **16,1** |
| ($T_F$=327°C et $T_E$=1737°C) | 704 | 10140 | 155 | **14,9** |
| **Gaz** | | | | |
| | -128,9 | 2,462 | 1001 | **0,0137** |
| **Air** | 38 | 1,136 | 1005 | **0,023** |
| | 538 | 0,438 | 1101 | **0,0574** |
| | 100 | 0,595 | 1885 | **0,025** |
| **Vapeur d'eau** | 538 | 0,271 | 2134 | **0,067** |
| | 1093 | 0,16 | 2511 | **0,131** |
| | -128,9 | 2,719 | 911 | **0,0137** |
| **Oxygène** | 93 | 1,07 | 931 | **0,0311** |
| | 538 | 0,482 | 1058 | **0,0628** |
| | -240 | 0,724 | 10300 | **0,0242** |
| **Hydrogène** | 93 | 0,0673 | 14396 | **0,21** |
| | 538 | 0,0304 | 14689 | **0,36** |
| | -128,9 | 0,338 | 5230 | **0,09** |
| **Hélium** | 93 | 0,134 | 5230 | **0,17** |
| | 538 | 0,0604 | 5230 | **0,315** |
| | -17,8 | 2,116 | 795 | **0,0133** |
| **Gaz carbonique** | 93 | 1,472 | 913 | **0,022** |
| | 538 | 0,668 | 1169 | **0,0549** |

# ANNEXE 1

## EQUATION DE BASE DE LA CONDUCTION

Considérons un solide opaque, isotrope, de volume *(𝒱)*, de chaleur spécifique $c_p$, de conductivité thermique $\lambda$, et dont la température ***T*** varie dans l'espace et dans le temps, ***T(M,t)***. Avec, en plus, des sources (puits) internes de chaleur générant (consommant) une puissance thermique par unité de volume ***p(M,t) (W/m³)***.

### 1. Forme générale de l'équation de la conduction:

- ***Bilan énergétique:***

On applique le principe de conservation de l'énergie à un volume élémentaire ***d𝒱*** de surface frontière **dS** contenu (*𝒱*), pendant l'intervalle du temps **dt** (***figure 1***).

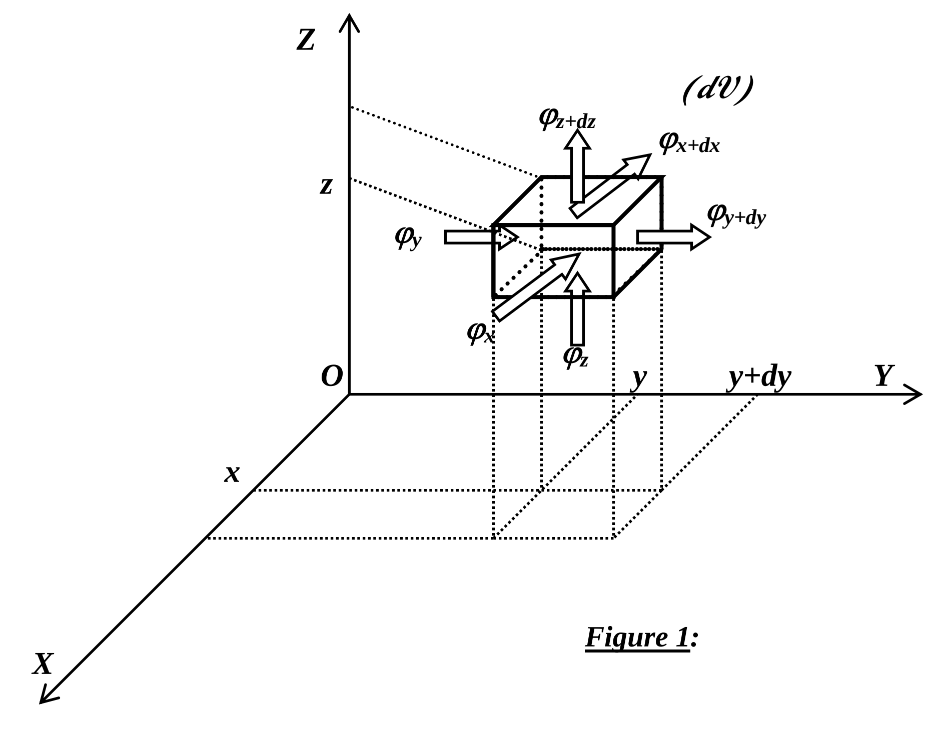



***Figure 1:***

Le bilan énergétique peut s'écrire, littéralement, sous la forme:

***Chaleur qui entre dans (d𝒱) pendant dt-Chaleur qui sort pendant dt+Chaleur dégagée (consommée) dans (d𝒱) par les sources (ou puits) internes pendant dt=Chaleur due à la variation de l'énergie interne pendant dt.***

Ou encore:

$$Entrée - Sortie + Génération\ (ou\ Dégradation) = Accumulation$$

Sous une forme algébrique:

$$\underbrace{\left(\varphi_x dS_x + \varphi_y dS_y + \varphi_z dS_z\right)}_{Entrée} - \underbrace{\left(\varphi_{x+dx} dS_x + \varphi_{y+dy} dS_y + \varphi_{z+dz} dS_z\right)}_{Sortie} + \underbrace{p(M,t)dV}_{Génération\,(dégradation)} = \underbrace{\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV}_{Accumulation} \quad (1)$$

$$\frac{\left(\varphi_x - \varphi_{x+dx}\right)}{dx} dS_x dx + \frac{\left(\varphi_y - \varphi_{y+dy}\right)}{dy} dS_y dy + \frac{\left(\varphi_z - \varphi_{z+dz}\right)}{dz} dS_z dz + p(M,t)dV = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

$$-\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\right) dV + p(M,t)dV = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

Or: $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$, vecteur densité de flux de chaleur.

L'équation du bilan devient:

$$\left(-div\vec{\varphi} + p(M,t)\right)dV = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

$d\mathcal{V}$ étant un volume arbitraire de ($\mathcal{V}$), on a donc en tout point de ($\mathcal{V}$):

$$-div\vec{\varphi} + p(M,t) = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

Compte tenu de la loi de *Fourier* ($\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{grad}T$), cette équation devient:

$$div\left(\lambda \overrightarrow{grad}(T(M,t))\right) + p(M,t) = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}(M,t) \qquad (2)$$

C'est l'équation de la chaleur dans un solide isotrope.

### *2. Formes particulières de l'équation de la conduction:*

Pour un solide homogène dont les propriétés caractéristiques: $\lambda$, $C_P$ et $\rho$ sont constantes et pour lequel *p* est indépendante de la température, on obtient l'équation linéaire classique de la chaleur:

$$\Delta T + \frac{p(M,t)}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (3)$$

où $a = \dfrac{\lambda}{\rho C_P}$ est la diffusivité thermique du matériau.

### *3. Expressions analytiques de l'équation de la chaleur:*

En introduisant les expressions du ***Laplacien*** $\Delta$ en coordonnées cartésiennes ***(x,y,z)***, cylindriques ***(r,θ,z)*** et sphériques ***(r,θ,φ)***, on obtient respectivement:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{p}{\lambda}(x,y,z,t) = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (4)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{p}{\lambda}(r,\theta,z,t) = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{p}{\lambda}(r,\theta,\varphi,t) = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (6)$$

# *Chapitre 4: Convection Thermique*

## *1. Généralités et définitions:*

### *1.1. Différentes formes de convection:*

La convection est un transport de chaleur dû à des mouvements macroscopiques du fluide. Elle intervient en particulier dans les échanges thermiques entre une paroi solide et un fluide.
On distingue deux formes de convection: ***la convection libre*** et ***la convection forcée***.
La distinction se fait sur l'origine du mouvement permettant le transfert d'énergie d'une région à une autre.

Lorsque ce mouvement est provoqué par les seules différences de températures, donc de densité, on dit que ***la convection*** est ***libre*** ou ***naturelle.***
Lorsque le fluide est mis en mouvement par un dispositif mécanique (ventilateur, pompe…), on dit que ***la convection*** est ***forcée***.
Lorsque les deux formes de convection coexistent, on dit que ***la convection*** est ***mixte***.

### *1.2. Régimes d'écoulement:*

L'étude de la convection est intimement liée à celle des régimes d'écoulement de fluide. Ainsi, dans l'écoulement d'un fluide le long d'une paroi solide deux régimes principaux peuvent être observés: ou bien le fluide s'écoule par filets parallèles à la paroi, ***le régime*** est alors ***laminaire***, ou bien à cet écoulement se trouve superposé une agitation correspondant à des vitesses normales à la paroi qui, en un point donné, sont constamment variables dans le temps mais restent petites devant les vitesses générales de l'écoulement (valeurs moyennes des composantes de la vitesse pendant un temps très long). On dit alors que ***le régime*** est ***turbulent***.

Il existe un troisième régime d'écoulement instable qui apparaît entre les régimes laminaire et turbulent et auquel on donne le nom de ***régime intermédiaire*** ou ***troublé***.

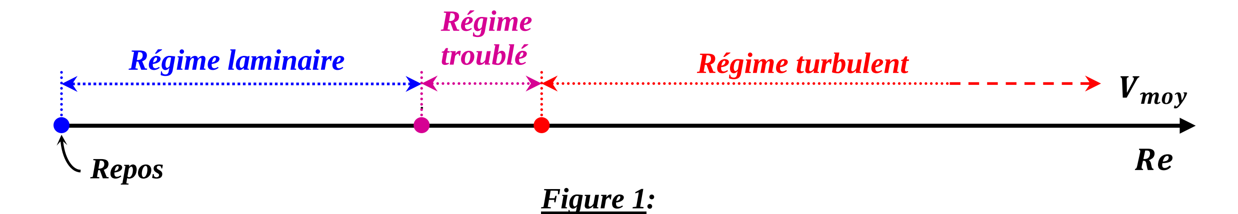



***Figure 1:***

### *1.3. Couches limites:*

On considère une paroi solide plane *(figure 2)* qu'on suppose normale au plan de la figure soit $\overrightarrow{OX}$ sa trace sur le plan; elle est balayée par un courant de fluide parallèle à l'axe $\overrightarrow{OX}$ dont la vitesse à l'infini est constante, soit $U_\infty$. Le bord d'attaque normale en ***O*** se projette en ***O***. A cause de la viscosité, la vitesse est nulle sur la paroi et elle croît régulièrement de ***O*** à $U_\infty$. quand on se déplace dans le sens de $\overrightarrow{OY}$. En réalité, les variations de la vitesse sont pratiquement localisées dans une mince couche fluide au voisinage de la plaque dite ***couche limite***. Le calcul attribue à cette couche une section parabolique (*figure 2*); son épaisseur à l'abscisse ***x*** étant $\delta_x = A\sqrt{\frac{\upsilon.x}{U_\infty}}$, $\upsilon$ est la viscosité cinématique, $\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$, ***A*** est un coefficient purement numérique.

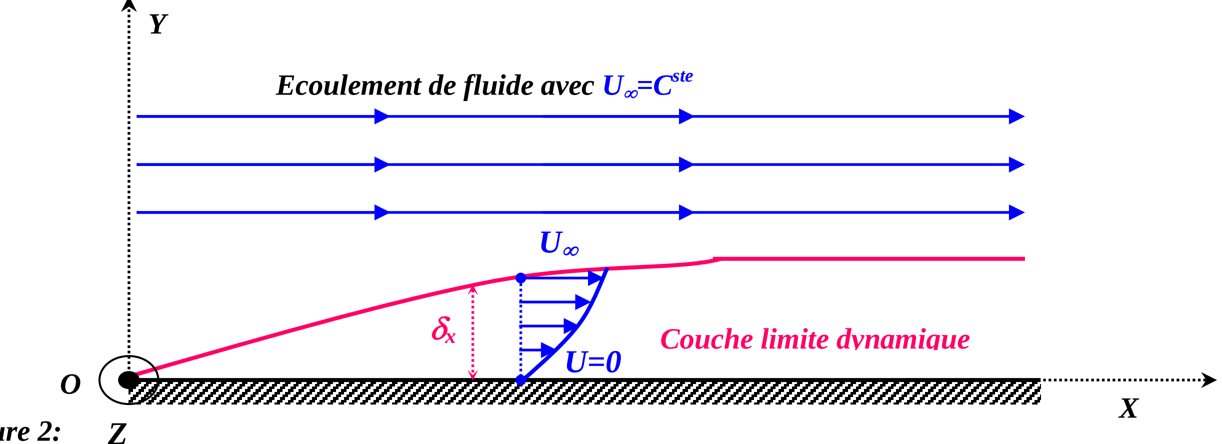



**Figure 2:**

Il se forme également depuis le bord d'attaque de la paroi une couche limite thermique dans laquelle sont localisées les variations de température (*figure 3*).

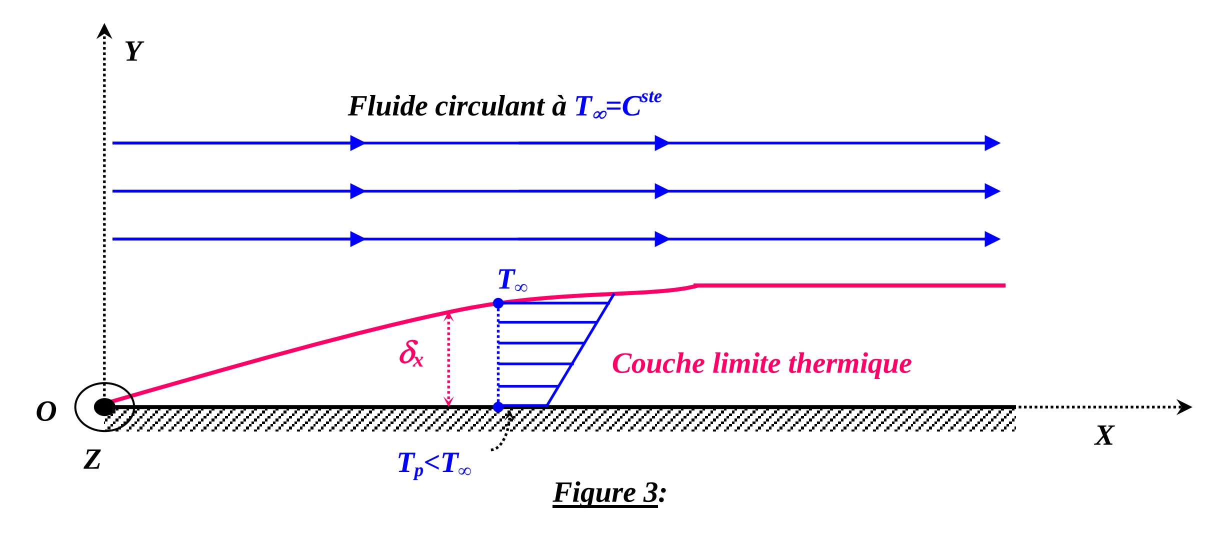



**Figure 3:**

Loin du bord d'attaque de la paroi solide, les deux couches se superposent. On obtient ainsi une couche fluide laminaire dont l'épaisseur dépend des propriétés physiques du fluide et de la nature de l'écoulement. Au sein de cette couche de fluide, on admet qu'il n'y a aucun mélange de matière et que la chaleur ne peut s'y transmettre que par conduction.

La conductivité thermique des fluides étant faibles par rapport à celles des solides, la couche laminaire, bien que mince, oppose une résistance importante au passage de la chaleur. Il en résulte dans cette région une variation rapide de la température.
En dehors de la couche laminaire, au sein du fluide, la chaleur se transmet par mélange des particules de fluide, provoquant ainsi une égalisation rapide de la température: on parle ainsi de la température du mélange du fluide, $T_\infty$.

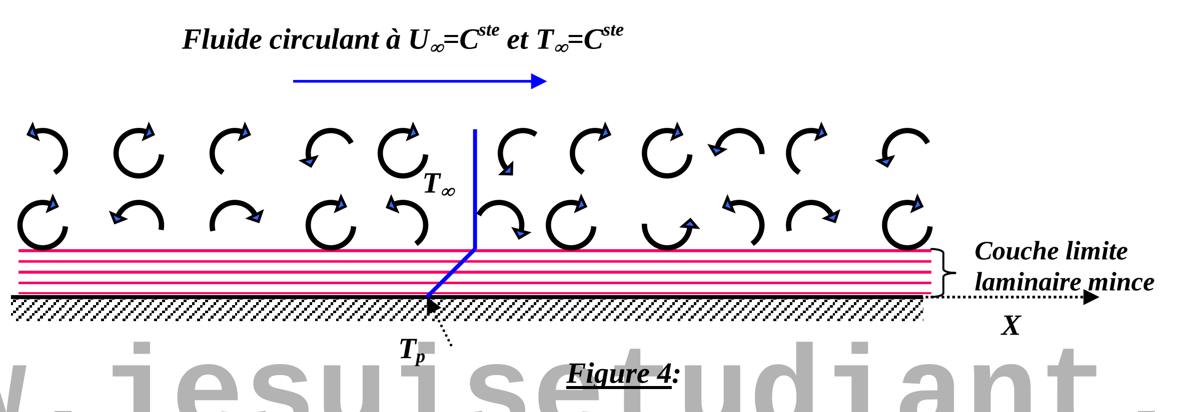



**Figure 4:**

Dans le cas d'un écoulement de fluide à l'intérieur d'une conduite cylindrique, les deux couches limites thermique et dynamique s'élargissent à mesure qu'on s'éloigne du bord d'attaque (entrée de la conduite) jusqu'à occuper tout l'intérieur de la conduite, on dit alors que les régimes dynamique et thermique sont établis (*figure 5*).

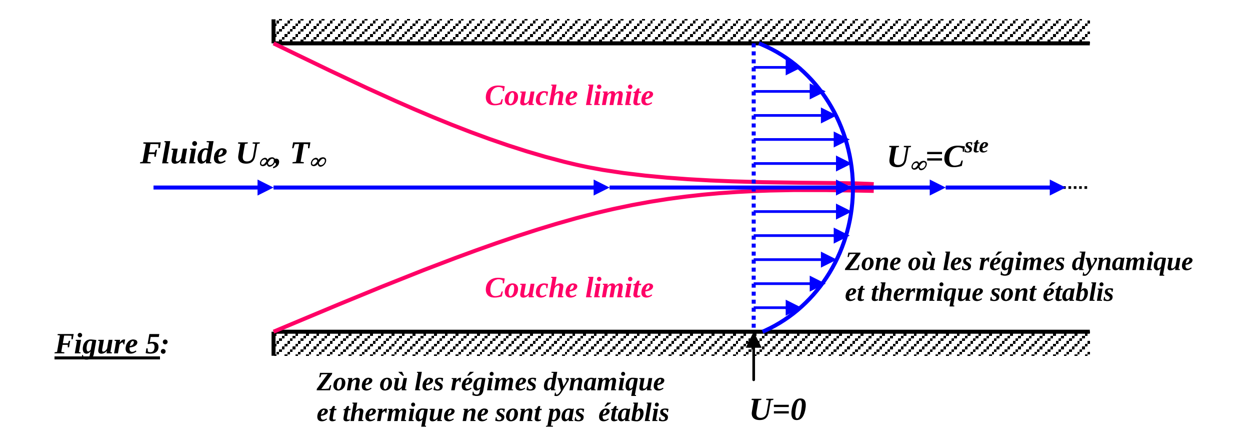



***Figure 5:***

### 2. *Calcul du coefficient d'échange thermique par convection, h :*

Considérons un fluide à la température du mélange $T_\infty$, en contact avec une paroi solide d'aire $S$ et de température $T_p$ ($T_p < T_\infty$) (*figure 3*). Le flux de conduction à travers la couche laminaire peut être exprimé par la loi de ***Fourier***:

$$\Phi = \lambda \times S \times \frac{(T_\infty - T_p)}{e} \qquad (1)$$

où $e$ est l'épaisseur de la couche laminaire et $\lambda$ la conductivité thermique du fluide.

Cependant, cette relation n'est pas utilisable en pratique, car on ne connaît généralement pas l'épaisseur $e$ de la couche laminaire.

On exprime alors le flux par la loi de ***Newton***, en posant $h = \frac{\lambda}{e}$ :

$$\Phi = h \times S \times (T_\infty - T_p) \qquad (2)$$

et on cherche à évaluer le coefficient $h$.

Pour définir le coefficient de convection, on distinguera deux cas: celui de la convection à l'intérieur d'une conduite cylindrique et celui d'une surface plongée dans un fluide indéfini. On va introduire les notions essentielles concernant la convection forcée, en régime permanent, en analysant un cas particulier correspondant à l'écoulement de fluide dans une conduite cylindrique. Ces notions sont valables pour les autres géométries. Le cas de la convection naturelle sera également traité à la fin de ce chapitre.

#### *2.1. Convection forcée à l'intérieur d'une conduite cylindrique*:

Le calcul du coefficient de convection $h$ n'est pas aisé. L'expérience montre qu'en l'absence de convection naturelle, $h$ n'est pas influencé par la différence de température $(T_\infty - T_p)$, mais qu'il dépend des sept grandeurs suivantes:

- $V_m$: vitesse moyenne du fluide,
- $\rho$: masse volumique du fluide,
- $c_p$: chaleur massique ou spécifique du fluide,
- $\mu$: viscosité dynamique du fluide,
- $\lambda$: conductivité thermique du fluide,
- $D_i$: diamètre intérieur de la conduite,
- $x$: abscisse de la section considérée, par rapport à l'entrée de la conduite.

On peut donc écrire:

$$\boldsymbol{h = f(V_m, \rho, c_p, \mu, \lambda, D_i, x)} \qquad (\mathbf{3})$$

Il est pratiquement impossible de déterminer expérimentalement l'influence de chacune des grandeurs sur $\boldsymbol{h}$, c'est-à-dire, de connaître la fonction $\boldsymbol{f}$. Il faudrait, pour cela, ne faire varier qu'une seule grandeur en maintenant les autres constantes. Or, cela n'est pas possible pour un nombre aussi élevé de variables, en raison d'inévitables interactions.
Cette complexité des phénomènes de convection rend nécessaire l'utilisation de techniques générales permettant de limiter le nombre de paramètres d'un problème. Parmi ces techniques on peut citer ***l'analyse dimensionnelle***.

### *2.1.1. Analyse dimensionnelle:*

Cette méthode stipule que la relation $\boldsymbol{f}$ liant entre elles huit variables $\boldsymbol{(h, V_m, \rho, c_p, \mu, \lambda, D_i, x)}$ qui s'expriment au moyen de quatre unités fondamentales ($\boldsymbol{M}$: masse ($\boldsymbol{Kg}$), $\boldsymbol{L}$: longueur ($\boldsymbol{m}$), $\boldsymbol{t}$: temps ($\boldsymbol{s}$), $\boldsymbol{T}$: température ($°\boldsymbol{C}$)) peut être réécrite sous la forme d'une autre fonction $\boldsymbol{F}$ qui lie $\underbrace{\mathbf{8}}_{\boldsymbol{Nbre\ de\ variables}} - \underbrace{\mathbf{4}}_{\boldsymbol{Nbre\ d'unités}} = \mathbf{4}$ nombres adimensionnels.

***Unités fondamentales*:**

***M*** *: masse (**Kg**)*
***L*** *: longueur (**m**)*
***t*** *: temps (**s**)*
***T*** *: température (°**C**)*

***Dimensions des variables:***

$[\boldsymbol{h}]$ : $\boldsymbol{M\ L^2\ t^{-3}.\ L^{-2}.T^{-1} = M\ t^{-3}\ T^{-1}}$ ***(W/m².°C)***
$[\boldsymbol{V_m}]$ : $\boldsymbol{L.t^{-1}}$ ***(m/s)***
$[\boldsymbol{\rho}]$ : $\boldsymbol{M\ L^{-3}}$ ***(Kg/m³)***
$[\boldsymbol{C_P}]$ : $\boldsymbol{L^2\ t^{-2}\ T^{-1}}$ ***(J/Kg.°C)***
$[\boldsymbol{\mu}]$ : $\boldsymbol{M\ L^{-1}\ t^{-1}}$ ***(Kg/m.s)*** **ou** ***(Pa.s)***
$[\boldsymbol{\lambda}]$ : $\boldsymbol{M\ L\ t^{-3}\ T^{-1}}$ ***(W/m.°C)***
$[\boldsymbol{D_i}]$ : $\boldsymbol{L}$ ***(m)***
$[\boldsymbol{x}]$ : $\boldsymbol{L}$ ***(m)***

La relation $\boldsymbol{f(h, V_m, \rho, c_p, \mu, \lambda, D_i, x) = 0}$ peut être remplacée par:

$$\frac{h \times D_i}{\lambda} = \sum_{k=1}^{n} A_k \times \left(\frac{\rho \times V_m \times D_i}{\mu}\right)^{a_k} \times \left(\frac{\mu \times c_p}{\lambda}\right)^{b_k} \times \left(\frac{x}{D_i}\right)^{c_k} \qquad (\mathbf{4})$$

Cette relation est appelée corrélation entre nombres sans dimension. Pour préciser sa forme, il faut déterminer les constantes $\boldsymbol{A_k}$ et les exposants $(\boldsymbol{a_k, b_k, c_k})$ en menant une étude expérimentale. Les nombres sans dimension ainsi créés ($\mathbf{4}$) sont classiques.

- $\boldsymbol{Nu = \frac{hD_i}{\lambda}}$ : nombre de ***Nusselt***, il caractérise l'échange thermique entre le fluide et la paroi.
- $\boldsymbol{Re = \frac{\rho V_m D_i}{\mu}}$ : nombre de ***Reynolds***, il caractérise le régime d'écoulement du fluide (circulation forcée):

- si $\boldsymbol{Re} < 2000$, le régime d'écoulement est ***laminaire***,
- si $\mathbf{2000} < Re < 3000$, le régime d'écoulement est ***intermédiaire*** ou ***troublé***,
- si $\boldsymbol{Re} > 3000$, le régime d'écoulement est ***turbulent***.

- $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$ : nombre de ***Prandtl***, il caractérise les propriétés dynamiques et thermiques du fluide. Il mesure le rapport de la diffusivité des quantités de mouvement à la diffusivité thermique du fluide.
- $\frac{x}{D_i}$ : abscisse réduite.

En résumé, les travaux expérimentaux étudiant le transfert de chaleur par convection forcée dans une situation donnée (géométrie, fluide…) fournissent leurs résultats sous forme de corrélations mathématiques:

$$Nu = F\left(Re, Pr, \frac{x}{D_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_k \times Re^{a_k} \times Pr^{b_k} \times \left(\frac{x}{D_i}\right)^{c_k} \qquad (5)$$

Les nombres ***Re***, ***Pr*** et $\frac{x}{D_i}$ sont calculables dès que sont connus les paramètres du problème. On peut alors en déduire ***h*** en calculant d'abord le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, par la formule ***(5)***, puis $h = \frac{Nu\lambda}{D_i}$ (voir ***TD***).

***N.B.:*** pour calculer la valeur numérique des nombres adimensionnels, il faut bien veiller à, toujours, utiliser un système cohérent d'unités, par exemple, le système international.

***2.1.2. Principales corrélations en convection forcée:***

***2.1.2.1. Régime d'écoulement laminaire (Re<$Re_C$=2000):***

- Pour des conduites très longues, le régime thermique est établi:
- dans le cas où la température de la paroi de la conduite est constante si $\frac{L}{D} > 0{,}035.Re.Pr$ , on utilisera:

$$Nu = 3{,}66 \qquad (6)$$

- dans le cas où le flux traversant la paroi de la conduite est constant si $\frac{L}{D} > 0{,}1.Re.Pr$ , on utilisera:

$$Nu = 4{,}36 \qquad (7)$$

Ces valeurs limites de ***Nu***, obtenues analytiquement, dépendent de la géométrie de la section de la conduite.

- Pour des conduites de longueur finie ( $\frac{L}{D} < 0{,}035.Re.Pr$ ou $\frac{L}{D} < 0{,}1.Re.Pr$ ), le régime thermique n'est pas établi, on pourra utiliser:
- la corrélation de ***Hausen*** valable pour $\frac{L}{D} < 0{,}05.Re.Pr$ :

$$Nu = 3{,}66 + \frac{0{,}0668\left(Re.Pr.\frac{D}{L}\right)}{1 + 0{,}04\left(Re.Pr.\frac{D}{L}\right)^{\frac{2}{3}}} \qquad (8)$$

(*température constante de la paroi de la conduite*)

ou

$$Nu = 3{,}66 + \frac{0{,}0668\left(Re\,.\,Pr\,.\,\frac{D}{L}\right)}{1 + 0{,}04\left(Re\,.\,Pr\,.\,\frac{D}{L}\right)^{\frac{2}{3}}} \times \left(\frac{\mu_m}{\mu_P}\right)^{0,14} \qquad (9)$$

$\frac{\mu_m}{\mu_p}$ : facteur de correction pour la viscosité.

Les indices $m$ et $p$ indiquent que la viscosité dynamique du fluide est mesurée à la température moyenne du fluide ($T_{fm}$) respectivement à la température de la paroi solide ($T_p$).

- la corrélation de ***Sieder*** et ***Tate*** valable pour $\left(Re\,.\,Pr\,.\,\frac{D}{L}\right) > 10$ :

$$Nu = 1{,}86\left(Re\,.\,Pr\,.\,\frac{D}{L}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14} \qquad (10)$$ (*température constante de la paroi de la conduite*)

avec: $0{,}48 < Pr < 16700$

#### *2.1.2.2. Régime d'écoulement turbulent ($Re > Re_C = 3000$):*

- Pour des conduites très longues ( $\frac{L}{D} > 60$ ), on pourra utiliser:
- la corrélation de ***Colburn*** pour $Pr > 0{,}5$ et $10^4 \leq Re \leq 12 \times 10^4$:

$$Nu = 0{,}023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,33} \qquad (11)$$

- la corrélation de ***Dittus-Boelter***, valable pour $0{,}7 < Pr < 120$ et $Re \geq 10^4$:

$$Nu = 0{,}023 \times Re^{0,8} \times Pr^{n} \qquad (12)$$

avec: $n = 0{,}3$ si $T_p < T_{fm}$ (refroidissement du fluide)
$n = 0{,}4$ si $T_p > T_{fm}$ (échauffement du fluide)
($T_p$ température de la paroi de la conduite, $T_{fm}$ température moyenne du fluide).

- la corrélation de ***Séban-Shimazaki*** pour les métaux liquides ($Pr << 1$), si la température de la paroi de la conduite est constante:

$$Nu = 4{,}8 + 0{,}025 \times (Re \times Pr)^{0,8} \qquad (13)$$

- la corrélation de ***Lyon-Martinelli*** valable pour les métaux liquides à faible nombre de ***Prandtl*** ($Pr << 1$) et pour $Re \times Pr > 50$:

$$Nu = 7 + 0{,}025 \times (Re \times Pr)^{0,8} \qquad (14)$$

Soulignons que les corrélations de ***Colburn*** et de ***Dittus-Boelter*** (relations (11) et (12)) doivent être appliquées pour des différences de température $|T_p - T_{fm}|$ faibles voire modérées, avec toutes les propriétés du fluide évaluées à $T_{fm}$.

Pour les grands écarts de température $T_p - T_{fm}$, il est recommandé d'utiliser la corrélation suivante dite de ***Sieder*** et ***Tate***, valable pour $Re \geq 10^4$ et $0{,}7 \leq Pr \leq 16700$:

$$Nu = 0{,}027 \times Re^{0,8} \times Pr^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14} \qquad (15)$$

- Pour des conduites de longueur finie ( $\frac{L}{D} < 60$ ), on pourra utiliser la corrélation:

$$Nu = Nu(Colburn) \times \left[1 + \left(\frac{D}{L}\right)^{0,7}\right] \qquad (16)$$

- Pour une conduite en serpentin ($\Delta$ pas du serpentin et $D_i$ son diamètre interne), on pourra utiliser la corrélation:

$$Nu = Nu(Colburn) \times \left[1 + 1,35 \times \frac{D_i}{\Delta}\right] \qquad (17)$$

Les grandeurs physiques $\lambda$, $\mu$, $\rho$, etc… dont dépendent les nombres adimensionnels sont prises habituellement à la température moyenne du fluide $T_{fm} = \frac{T_{fe} + T_{fs}}{2}$, entre l'entrée ($x = 0$) et la sortie ($x = L$) de la conduite. Cependant, si la paroi est à une température $T_p$ très différente de $T_{fm}$ , il conviendra d'introduire une autre moyenne $T_m = \frac{T_{fm} + T_p}{2}$ qui est la température du film laminaire.

*Pour les conduites à sections non circulaires, on peut utiliser toutes les corrélations, à condition toutefois de remplacer le diamètre interne de la conduite figurant dans l'expression de divers nombres adimensionnels par le diamètre hydraulique $D_h$ équivalent donné par:*

$$D_h = \frac{4 \times S}{P} \qquad (18)$$

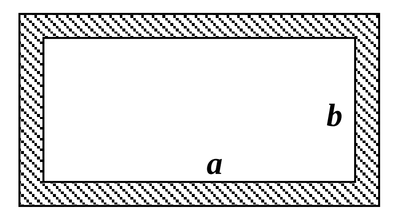
où $S$ est l'aire de la section de la veine fluide et $P$ le périmètre mouillé interne.

***Exemples:***

- ***Conduite à section rectangulaire:***

$$D_h = \frac{4 \times a \times b}{2 \times (a + b)} = \frac{2 \times a \times b}{a + b} \qquad (19)$$

***Figure 6:***




- ***Espace annulaire:***

$$D_h = \frac{4 \times (S_2 - S_1)}{P_1 + P_2} = D_2 - D_1 \qquad (20)$$

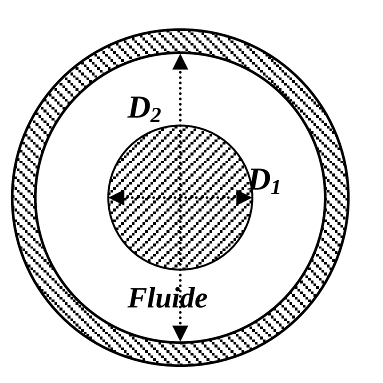



***Figure 7***

- ***Espace entre deux plans parallèles:***

C'est l'extension de la formule relative à la conduite à section rectangulaire si $a \to \infty$.

$$D_h = 2 \times b \qquad (21)$$

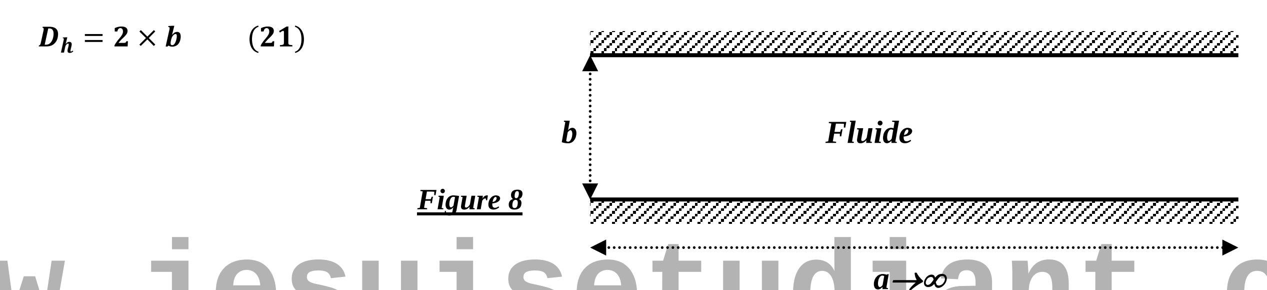



***Figure 8***

### *2.2. Convection forcée à l'extérieur d'obstacles solides*

#### *2.2.1. Cas de l'écoulement d'un fluide le long d'une plaque :*

**a) *Ecoulement laminaire pour $Re < 3 \times 10^5$ :***

- Pour $Pr > 0{,}5$, on utilisera la corrélation suivante :

$$Nu = 0{,}664 \times Re^{\frac{1}{2}} \times Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (22)$$

- Pour $Pr \ll 1$ (métal liquide, on utilisera la corrélation suivante :

$$Nu = 1{,}1 \times \sqrt{(1 - Pr)^{\frac{1}{3}} \times (Re \times Pr)} \qquad (23)$$

Avec :

$$Re = \frac{\rho \times V_\infty \times L}{\mu} \qquad (24)$$

$$Nu = \frac{h \times L}{\lambda} \qquad (25)$$

$L$ étant la longueur de la plaque et $V_\infty$ la vitesse du fluide loin de la paroi.

**b) *Ecoulement turbulent pour $Re > 5 \times 10^5$ :***

- Pour $Pr > 0{,}5$, on utilisera la corrélation suivante :

$$Nu = 0{,}035 \times Re^{\frac{4}{5}} \times Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (26)$$

- Pour $Pr \ll 1$ (métal liquide), on utilisera la corrélation suivante :

$$Nu = 0{,}59 \times (Re \times Pr)^{0{,}61} \qquad (27)$$

Pour les deux régimes d'écoulement, les propriétés physiques du fluide sont prises à la température du film laminaire $T_m$.

#### *2.2.2. Cas de la circulation d'un fluide perpendiculairement à l'axe de la conduite:*

Pour une circulation du fluide perpendiculaire à la conduite, il se forme un sillage en aval de celle-ci dont la forme et la dimension dépendent du nombre de ***Reynolds***, $Re$.

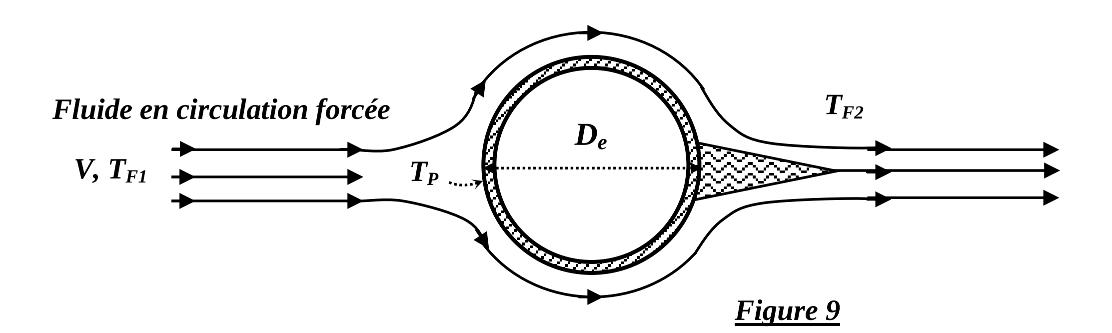



***Figure 9***

Pour calculer le nombre de ***Nusselt Nu*** on utilisera:

- la corrélation de ***Hilpert*** si le fluide est un gaz:

$$Nu = A \times Re^m \qquad (28)$$

avec:

$$Re = \frac{\rho \times V_m \times D_e}{\mu} \qquad (29)$$

$D_e$ est le diamètre extérieur de la conduite et $V_m$ est la vitesse moyenne du fluide calculée en amont de la conduite (loin de la paroi).

- la corrélation de ***Knudsen et Katz*** si le fluide est un liquide:

$$Nu = 1,11 \times A \times Re^{m} \times Pr^{0,31} \qquad (30)$$

avec:

Le coefficient $A$ et l'exposant $m$ étant les mêmes pour les deux corrélations; leurs valeurs à utiliser sont données dans le tableau suivant:

| $Re$ | $A$ | $m$ | $Nu\ (Gaz)$ |
|---|---|---|---|
| *1-4* | *0,891* | *0,330* | *0,891-1,41* |
| *4-40* | *0,821* | *0,385* | *1,40-3,40* |
| *40-4000* | *0,615* | *0,466* | *3,43-29,34* |
| *4000-40000* | *0,174* | *0,618* | *29,3-121,5* |
| *40000-400000* | *0,024* | *0,805* | *121,6-776* |

Pour les conduites à section non circulaire, on utilisera la corrélation:

$$Nu = A \times Re^{m} \times Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (31)$$

Les valeurs de $A$ et $m$ sont données dans le tableau suivant pour différents types de section de la conduite:

| | $Re$ | $A$ | $m$ |
|---|---|---|---|
| $V$ $D_e$ | $5\times10^{3}-10^{5}$ | *0,102* | *0,675* |
| $V$ $D_e$ | $5\times10^{3}-10^{5}$ | *0,246* | *0,588* |
| $V$ $D_e$ | $5\times10^{3}-1,95\times10^{4}$<br>$1,95\times10^{4}-10^{5}$ | *0,160*<br>*0,0385* | *0,638*<br>*0,782* |
| $V$ $D_e$<br>*Plaque verticale* | $4000-1,5\times10^{4}$ | *0,228* | *0,731* |

***2.2.3. Cas de la circulation d'un fluide perpendiculairement à un faisceau de conduites cylindriques parallèles:***

L'écoulement perpendiculaire à des rangées de tubes a une importance considérable tout particulièrement dans les réchauffeurs d'air et les échangeurs de chaleur tubulaires (***voir chapitre 3 du cours des machines thermiques***).

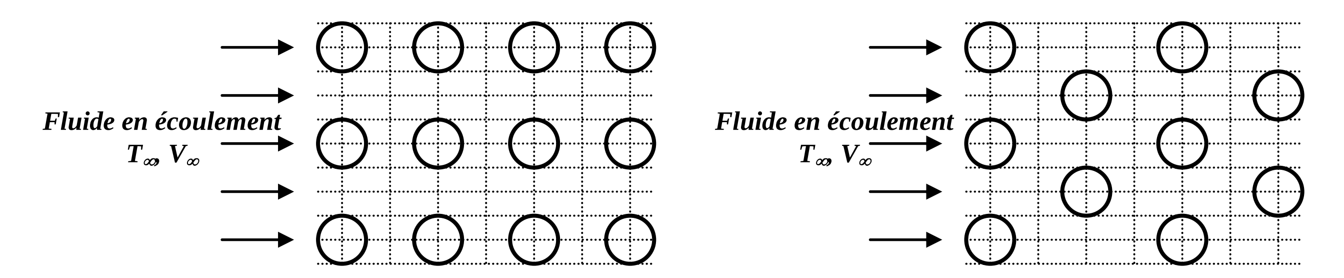



***Figure 10-a*: Faisceau aligné.** ***Figure 10-b* : Faisceau quinconcé.**

L'expérience montre que la disposition de tubes en quinconce est le siège d'une grande turbulence, donc d'un coefficient de convection plus élevé, que la disposition en ligne.

Pour déterminer la valeur du nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, ***Colburn*** a recommandé la corrélation suivante:

$$\boldsymbol{Nu = C \times Re^{0,6} \times Pr^{0,33}} \qquad (\mathbf{32})$$

avec:

$$\begin{cases} \boldsymbol{C = 0,26} & \text{pour un faisceau aligné} \\ \boldsymbol{C = 0,33} & \text{pour un faisceau quinconcé} \end{cases}$$

valable pour $\mathbf{2 \times 10^3} < Re < \mathbf{4 \times 10^4}$.

$$\boldsymbol{Re = \frac{\rho \times V_{max} \times D_e}{\mu}} \qquad (\mathbf{33})$$

$\boldsymbol{V_{max}}$ représente la vitesse dans la section la plus étroite.

***2.3. Calcul du coefficient d'échange thermique h en convection naturelle:***

Dans la convection naturelle, le mouvement de fluide est dû aux variations de sa masse volumique provenant des échanges de chaleur entre le fluide et la paroi.

Ces échanges jouent un rôle en pratique, associés souvent à des échanges par rayonnement. Citons par exemple:

- le chauffage domestique,
- les pertes par les parois dans les installations industrielles.

***2.3.1. Description du phénomène:***

Considérons une plaque plane verticale chaude (dont la température de la paroi est $\boldsymbol{T_P}$) au contact d'un fluide froid (dont la température loin de la paroi est $\boldsymbol{T_\infty}$). Au voisinage de la plaque existe une zone perturbée appelée couche limite de convection naturelle.

***2.3.2. Résultats de l'analyse dimensionnelle:***

Dans le cas d'un transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une plaque plane, le coefficient de convection ***h*** dépend des caractéristiques du fluide: $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{c_P}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{g}$, de la paroi caractérisée par la longueur ***L***, et de l'écart de température $\boldsymbol{\Delta T}$ aux bornes du film ce que l'on peut traduire par une relation du type:

$$\boldsymbol{h = f(\lambda, \rho, \mu, C_P, \beta, g, L, \Delta T)} \qquad \textit{(34)}$$

Des considérations d'analyse dimensionnelle, semblables à celles exposées dans le cas de la convection forcée, amènent à définir un groupe adimensionnel appelé nombre de ***Grashof***.

$$Gr = \frac{L^3 . \rho^2 . g . \beta . \Delta T}{\mu^2} \qquad (35)$$

où:

- ***L (m)**:* est une dimension linéaire permettant de calculer la surface d'échange (hauteur de la plaque verticale dans l'exemple précédent, côté d'un carré, largeur d'un rectangle, diamètre d'un cylindre, etc.),
- ***$\beta$ (°K$^{-1}$)**:* est le coefficient de dilatation volumique du fluide à pression constante (pour l'air et les gaz: $\beta = \frac{1}{T'_{moy}}$, avec $T'_{moy} = \frac{1}{2} \times \left( T_P + \left( \frac{T_{\infty(entrée)} + T_{\infty(sortie)}}{2} \right) \right)$,
- ***$\mu$ (Kg/m.s)***: est la viscosité dynamique du fluide,
- ***$\rho$ (Kg/m$^3$)***: est la masse volumique du fluide,
- ***g***: est l'accélération de la pesanteur (***g=9,81 m/s$^2$***),
- ***$\Delta T = |T_P - T_\infty|$ (°C** ou **°K)***: est la différence de température entre la paroi solide et le fluide.

Le nombre de ***Grashof***, ***Gr***, joue le même rôle en convection naturelle que le nombre de ***Reynolds***, ***Re***, en convection forcée. Sa valeur conditionne la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement dans la zone perturbée.

Indiquons que le nombre sans dimension:

$$Ra = Gr \times \mathrm{Pr} \quad (36)$$

s'appelle nombre de ***Rayleigh*** et est souvent utilisé dans la littérature.
Si l'on reprend l'exemple de la plaque verticale, plus la hauteur ***L*** de celle-ci augmente, plus la valeur du nombre de ***Grashof*** croît.

L'expérience montre que, pour les gaz, lorsque ce nombre dépasse ***10$^9$***, les filets, jusque là laminaires, présentent des ondulations qui s'amplifient progressivement et deviennent turbulents dans la partie supérieure.

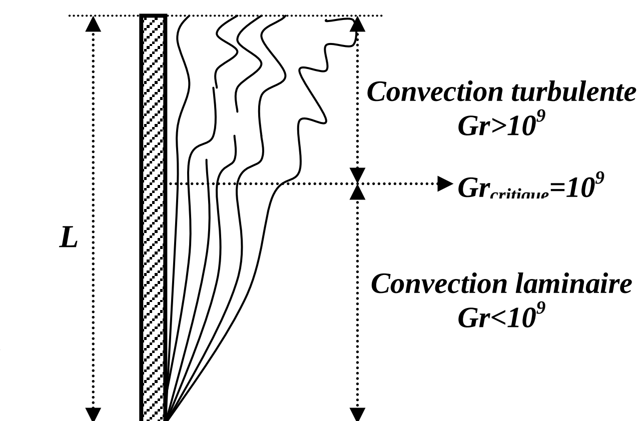



***Figure 11:***

En convection naturelle, le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, s'exprime en fonction des nombres de ***Grashof***, ***Gr***, et de ***Prandtl***, ***Pr***:

$$Nu = F(Gr, Pr)$$

Les corrélations sont, en général, de la forme:

$$Nu = C \times (Gr \times Pr)^n \qquad (37)$$

Les grandeurs physiques sont déterminées à la température du film laminaire: $T'_{moy} = \frac{1}{2} \times \left( T_P + \left( \frac{T_{\infty(entrée)} + T_{\infty(sortie)}}{2} \right) \right)$.

Les valeurs du coefficient $C$ et de l'exposant $n$ sont données dans le tableau suivant:

| *Géométrie et orientation de la paroi* | *Dimension caractéristique pour le calcul de **Gr** et de **Nu*** | *Coefficient **C*** | |
|---|---|---|---|
| | | *Régime laminaire* ***n=1/4*** | *Régime turbulent* ***n=1/3*** |
| *Plaque horizontale chauffant vers le haut* | *Largeur **l*** | ***0,54*** $(10^5<(Gr.Pr)<2\times10^7)$ | ***0,14*** $(2\times10^7<(Gr.Pr)<4\times10^{10})$ |
| *Plaque horizontale chauffant vers le bas* | *Largeur **l*** | ***0,27*** $(3\times10^5<(Gr.Pr)<3\times10^{10})$ | ***0,07*** $(3\times10^{10}<(Gr.Pr)<10^{13})$ |
| *Plaque verticale ou cylindre vertical de grand diamètre par rapport à l'épaisseur de la zone perturbée* | *Hauteur **H** (ou **D**)* | ***0,59*** $(10^4<(Gr.Pr)<10^9)$ | ***0,13*** $(10^9<(Gr.Pr)<10^{13})$ |
| *Cylindre horizontal* | *Diamètre extérieur **D*** | ***0,53*** $(10^3<(Gr.Pr)<10^9)$ | ***0,10*** $(10^9<(Gr.Pr)<10^{13})$ |

***Remarque*:**

- La valeur de l'exposant $n$ dépend du régime de convection.
- La valeur du coefficient $C$ dépend du régime de convection ainsi que de la géométrie et de l'orientation de la paroi.

Si une plaque plus chaude que le fluide environnant a sa face chauffante tournée vers le haut, le fluide chaud, plus léger, s'élève, et il est remplacé facilement par du fluide froid; si au contraire la face chauffante est tournée vers le bas le fluide chaud n'est que difficilement remplacé par du fluide froid; les échanges par convection devront donc être plus faibles si la face chauffante est tournée vers le bas. C'est bien ce que montrent les valeurs du coefficient $C$ du tableau ci-dessus. Ces considérations doivent être inversées si la plaque est plus froide que le fluide.

*On utilisera ainsi la même corrélation pour une face chaude vers le haut que pour une face froide vers le bas.*

➤ ***Exercice d'application:***

On considère deux plaques horizontales parallèles, de grandes surfaces, séparées par une couche d'air, respectivement aux températures $T_1 = 50°C$ pour la plaque supérieure et $T_2 = 30°C$ pour la plaque inférieure. La distance entre les deux plaques est $H = 5\ mm$. L'émissivité radiative de la plaque chaude est prise égale à $\varepsilon_1 = 0,8$ et celle de la plaque froide est $\varepsilon_2 = 0,9$.

***1.*** Montrer que, dans les conditions de températures considérées, le transfert de chaleur par convection naturelle entre l'air et les plaques ne peut pas avoir lieu. Pour cela, calculer le produit du nombre de ***Prandtl*** par le nombre de ***Grashof*** $Pr \times Gr$.

➤ Pour calculer le nombre de ***Nusselt Nu***, on utilise la corrélation suivante :

$$Nu = C \times (Pr \times Gr)^n$$

On rappelle que $Gr$ est donné par:

$$Gr = \frac{\rho^2 \times g \times \beta \times \Delta T \times H^3}{\mu^2}$$

où :

$\Delta T = |T_1 - T_2|$

$\beta\ (K^{-1})$ est le coefficient de dilatation volumique de l'air à pression constante:

$$\beta = \frac{1}{T_m}$$

$T_m = \frac{T_1+T_2}{2}$ : température moyenne de la couche d'air.

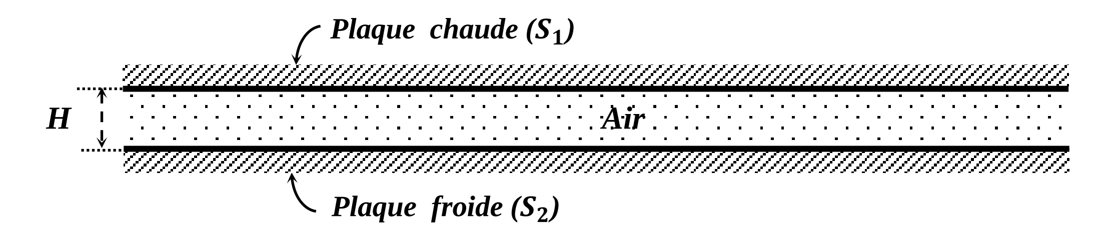
Les paramètres $C$ et $n$ prennent respectivement les valeurs :

- $C = 0$ et $n = 0$ si $Pr \times Gr < 3 \times 10^5$ ➞ ***pas de convection***;
- $C = 0,27$ et $n = 1/4$ si $3 \times 10^5 < Pr \times Gr < 3 \times 10^{10}$ ➞ ***le régime est laminaire***;
- $C = 0,14$ et $n = 1/3$ si $Pr \times Gr > 3 \times 10^{10}$ ➞ ***le régime est turbulent***.

| *Fluide* | $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$ | *ρ (Kg/m³)* | *$C_p$ (J/Kg.°C)* | *λ (W/m.°C)* | *μ (Kg/m.s)* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Air* | *40°C* | *1,136* | *1004* | *0,027* | *$0,0191 \times 10^{-3}$* |

2. Calculer la densité de flux de chaleur transféré par conduction à travers la couche d'air.
3. Calculer la densité de flux de chaleur net transféré par rayonnement entre les deux plaques.
4. En déduire la densité de flux de chaleur total transféré.
5. Calculer la variation relative (en **%**) de la densité de flux de chaleur total si l'on utilise un revêtement sur la surface froide qui ramène son émissivité à $\varepsilon_2 = 0,1$.

On donne : $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ $W/m^2.K^4$, la constante de ***Stefan-Boltzmann*** et $g = 9,81\ m/s^2$, l'accélération de la pesanteur.




***Solution:***

1. Montrons qu'il n'y aura pas de transfert de chaleur par convection naturelle entre l'air et les deux plaques.

Pour cela calculons le nombre de ***Rayleigh*** $Ra = Pr \times Gr$:
On a :

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu . c_p}{\lambda} \approx 0,71 \\ Gr = \dfrac{\rho^2 \times g \times \beta \times \Delta T \times H^3}{\mu^2} \approx 277,2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$Ra = Pr \times Gr = 196,7$$

$Ra = Pr \times Gr = 196,7 < 3 \times 10^5$, donc il n'y aura pas de transfert de chaleur par convection naturelle.

2. Densité de flux de chaleur transféré par conduction à travers la couche d'air.

$$\varphi_{cd} = \lambda \times \frac{T_1 - T_2}{H} = 108\ W/m^2$$

***3.*** Densité de flux de chaleur net transféré par rayonnement entre les deux plaques.

$$\varphi_{r,net:1\to 2} = \mathcal{F}_{12}.\,\sigma.\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

avec:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

Or: $F_{12} = 1$ et $S_1 = S_2$
ainsi:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \approx 0{,}735$$

Donc :

$$\varphi_{r,net:1\to 2} \approx 102\ W/m^2$$

***4.*** Densité de flux de chaleur total transféré :

$$\varphi_{tot} = \underbrace{\varphi_{cv}}_{=0} + \varphi_{cd} + \varphi_{r,net:1\to 2}$$

A. N. : $\varphi_{tot} \approx 210\ W/m^2$

***5.*** Si l'on utilise un revêtement sur la surface froide qui ramène son émissivité à $\varepsilon_2 = 0{,}1$, on aura :

$$\varphi'_{r,net:1\to 2} = \mathcal{F}'_{12}.\,\sigma.\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

avec:

$$\mathcal{F}'_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon'_2} - 1} \approx 0{,}098$$

Donc :

$$\varphi'_{r,net:1\to 2} \approx 13{,}6\ W/m^2$$

La densité de flux de chaleur total transféré $\varphi'_{tot}$ sera égal à:

$$\varphi'_{tot} = \underbrace{\varphi_{cv}}_{=0} + \varphi_{cd} + \varphi'_{r,net:1\to 2}$$

***A. N. :*** $\varphi'_{tot} \approx 121{,}6\ W/m^2$

Il en résulte que la variation, en pourcentage, du flux de chaleur total sera égale à:

$$\frac{\Delta\varphi_{tot}}{\varphi_{tot}}\% \approx -42\%$$